E. TÉBAR FLORES

EXÁMENES DE MATEMÁTICAS II DE SELECTIVIDAD

444 PROBLEMAS TOTALMENTE RESUELTOS

E. TEBAR FLORES

EXAMENES DE
MATEMATICAS II
DE SELECTIVIDAD

444 PROBLEMAS TOTALMENTE RESUELTOS

tebar flores

calle Gaztambide 61 28015 MADRID
Tel.: (91) 544 47 51 Fax: (91) 544 47 51

Diseño de la portada: Fernando Coquillat

D.L.: 383-AB-1993
I.S.B.N.: 84-7360-135-1

Impreso en la **Imprenta TEBAR FLORES, S.L.**
Avda. de los Toreros, 7 - ALBACETE
Tel.: (967) 22 11 37

ÍNDICE

PRÓLOGO

Consciente de la dificultad que entraña para la mayoría de los estudiantes de COU la asignatura de Matemáticas II, he procurado, en todos los temas, hacer asequible la materia a cualquiera que aborde su estudio, por muy bajo que sea su nivel matemático. Se inicia cada capítulo con un denso resumen práctico de la teoría correspondiente, aclarando los conceptos expuestos con numerosos ejemplos, ejercicios y problemas de aplicación inmediata.

La lectura detenida de este resumen teórico permitirá al estudiante entender claramente los problemas resueltos a continuación. Estos problemas han sido seleccionados de los exámenes propuestos de los últimos años en las distintas universidades españolas, procurando, por su variedad, que abarquen los diferentes tipos de problemas que se puedan presentar. El estudiante podrá tener así la seguridad de que estará capacitado para superar con éxito tanto los exámenes de COU como los de Selectividad.

Los problemas están resueltos y presentados tal y como el estudiante debe hacerlo en los exámenes, sin omitir ningún paso, de manera ordenada y dando el resultado de una manera clara.

El autor

CAPITULO 1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES METODO DE GAUSS

Una ecuación es **lineal** respecto de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si se puede expresar de la forma:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = k \qquad (1)$$

siendo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (coeficientes de las incógnitas) y k (término independiente o constante) elementos conocidos de un cuerpo **K**. En lo sucesivo consideraremos que $K = R$, cuerpo de los números reales.

$(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in R^n$ es una solución de la ecuación (1) si se verifica que

$$a_1\, c_1 + a_2\, c_2 + \cdots + a_n\, c_n = b$$

Resolver una ecuación es obtener todas sus soluciones.

La ecuación $\qquad 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -11$

es lineal, siendo $(3, 1, -3)$ una solución, ya que $\quad 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 + 4(-3) = -11$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES. Se llama así a un conjunto de ecuaciones lineales que deben ser verificadas simultáneamente.

El sistema

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = k_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = k_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = k_m \end{array}\right| \quad (2) \qquad \text{simbólicamente:} \quad \begin{array}{l} E_1 = k_1 \\ E_2 = k_2 \\ \cdots\cdots \\ E_m = k_m \end{array}$$

es un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

$(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in R^n$ es una solución del sistema (2) si las m ecuaciones de (2) son verificadas al sustituir las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, por $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Una solución del sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 - 4x_2 = 18 \\ x_1 + 2x_2 = -4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 1 \end{array}\right|$$

es $(2, -3)$, ya que

$$\left.\begin{array}{r} 3 \cdot 2 - 4(-3) = 18 \\ 2 + 2(-3) = -4 \\ 5 \cdot 2 + 3(-3) = 1 \end{array}\right|$$

Resolver un sistema es obtener todas sus soluciones.

Un sistema de ecuaciones puede o no tener soluciones. Un sistema que no admite ninguna solución se llama sistema **incompatible.** Si tiene alguna solución se llama sistema **compatible.** Si la solución es única se llama **compatible determinado**, y si tiene varias soluciones **compatible indeterminado.** En resumen:

Sistema compatible (tiene solución) $\left\{\begin{array}{l}\textit{compatible determinado (una sola solución)}\\ \textit{compatible indeterminado (varias soluciones)}\end{array}\right.$

Sistema incompatible (no tiene solución)

El sistema
$$\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ y=3 \end{array}\right\}$$

tiene la solución única $x = 2$, $y = 3$, es, por tanto, compatible determinado.

El sistema
$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+3z=5 \\ x+y+2z=4 \end{array}\right\}$$

es compatible indeterminado, ya que a cada valor distinto de k en: $x = 1-k$, $y = 3-k$, $z = k$, corresponde una solución distinta del sistema.

El sistema
$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ x+y=5 \end{array}\right\}$$

es incompatible, no tiene solución (restando ambas ecuaciones nos da: $0 = -2$, absurdo).

Dos sistemas son **equivalentes** cuando ambos tienen las mismas soluciones.

Si una ecuación es combinación lineal de otras, es decir, si resulta de sumarlas miembro a miembro, previamente multiplicadas por números cualesquiera, se dice que es consecuencia de ellas.

En el sistema
$$\left.\begin{array}{r} 4x+2y=4 \\ 3x-\ y=2 \\ 6x+8y=8 \end{array}\right\}$$

la tercera ecuación es consecuencia de las dos primeras, ya que es igual a la primera ecuación multiplicada por 3, más la segunda multiplicada por -2.

Si en un sistema de m ecuaciones hay una ecuación que es combinación lineal de otras, puede suprimirse y nos quedará un sistema de $(m-1)$ ecuaciones que es equivalente al anterior.

El sistema del último ejemplo, como la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras, es equivalente al sistema:
$$\left.\begin{array}{r} 4x+2y=4 \\ 3x-\ y=2 \end{array}\right\}$$

Eliminar una incógnita entre varias ecuaciones es obtener una ecuación, consecuencia de las anteriores, y que no contiene dicha incógnita.

Si en el sistema
$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+\ z=4 \\ 5x+4y+3z=6 \\ 4x-6y-9z=7 \end{array}\right\}$$

sumamos a la tercera ecuación la primera multiplicada por 3, más la segunda multiplicada por 2, obtendremos la ecuación
$$14x-7y=31$$

que es consecuencia de las ecuaciones del sistema y en la que se ha eliminado la z.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE EQUIVALENCIA: Si en un sistema de ecuaciones se sustituye una ecuación por el resultado de sumarla miembro a miembro (previamente multiplicada por un número distinto de cero) con otra u otras ecuaciones multiplicadas por números cualesquiera, resulta un sistema equivalente al dado.

Si $\alpha_1 \neq 0$, son equivalentes los dos sistemas siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = k_1 \\ E_2 = k_2 \\ \cdots\cdots \\ E_m = k_m \end{array}\right\} (3) \qquad \left.\begin{array}{r} \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_m E_m = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \cdots + \alpha_m k_m \\ E_2 = k_2 \\ \cdots\cdots \\ E_m = k_m \end{array}\right\} (4)$$

en los que la primera ecuación de (3) se ha sustituido por la ecuación

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_m E_m = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \cdots + \alpha_m k_m$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ números reales.

Si en el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + 4z = 5 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \\ -x + 4y - 8z = 1 \end{array}\right\}$$

se sustituye la primera ecuación por el resultado de multiplicarla por 4 y sumarle la segunda multiplicada por -5, y la tercera multiplicada por 2 se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -y - 2z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 4 \\ -x + 4y - 8z = 1 \end{array}\right\}$$

que es equivalente al dado.

RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES. METODO DE GAUSS. En el teorema anterior se funda el **método de Gauss**, o de reducción, para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Sea el sistema (2): Si $a_{11} \neq 0$, se deja la primera ecuación invariable, la segunda ecuación se sustituye por la ecuación que resulta de multiplicarla por a_{11} y sumarle la primera ecuación multiplicada por $-a_{21}$, la tercera ecuación se sustituye por la ecuación que resulta de multiplicarla por a_{11} y sumarle la primera multiplicada por $-a_{31}$, y así sucesivamente hasta sustituir la última ecuación por la que resulta de multiplicarla por a_{11} y sumarle la primera multiplicada por $-a_{m1}$. Obtendremos así el sistema

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = h_2 \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = h_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{m2}x_2 + b_{m3}x_3 + \cdots + b_{mn}x_n = h_m \end{array}\right\} (5)$$

que es equivalente a (2) y del que se ha eliminado la incógnita x_1 en las ecuaciones $2^a, 3^a, \ldots, m^a$.

En el sistema (5), si $b_{22} \neq 0$, se dejan invariables las dos primeras ecuaciones y se elimina, como anteriormente, la incógnita x_2 en cada una de las restantes ecuaciones. Se obtendrá un sistema equivalente al (2) de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1 \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n = h_2 \\ c_{33}x_3 + \cdots + c_{3n}x_n = j_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m3}x_3 + \cdots + c_{mn}x_n = j_m \end{array}\right\} \quad (6)$$

Así se continua hasta obtener un sistema en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la ecuación anterior, y que será equivalente al sistema primitivo.

Este método permite pasar de todo sistema de ecuaciones lineales a otro sistema equivalente cuya solución se obtiene más facilmente. Se comienza resolviendo la última ecuación, el valor (o valores) obtenido se sustituye en la penúltima, se resuelve ésta y se continua de esta forma hasta llegar a la primera ecuación.

Ejemplo: Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 5x - 4y + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

Representando, respectivamente, las ecuaciones por (1), (2) y (3), y por $a(1) - b(2)$ la ecuación que resulta de multiplicar la ecuación (1) por a y sumarle la ecuación (2) multiplicada por $-b$:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 5x - 4y + 2z = 3 \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = 2(2) - 3(1) \\ (3') = 2(3) - 5(1) \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ 7y - 5z = -1 \\ -3y - z = -9 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = 7(3') + 3(2') \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ 7y - 5z = -1 \\ -22z = -66 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad z = \frac{-66}{-22} = 3 \quad 7y = -1 + 5z = 14;\ y = 2 \quad 2x = 3 + y - z = 2;\ x = 1$$

Los cálculos se simplifican operando de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & -4 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = 2(2) - 3(1) \\ (3') = 2(3) - 5(1) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3') = 7(3') + 3(2') \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -22 & -66 \end{array}\right) \Rightarrow \text{ el sistema primitivo es equivalente al siguiente:}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 3 \\ 7x - 5z = -1 \\ -22z = -66 \end{array}\right| \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}$$

Si al aplicar el método de Gauss resulta alguna ecuación absurda, de primer miembro nulo y el segundo miembro distinto de cero (de la forma $0 = k_i \neq 0$), el sistema es **incompatible**, (no tiene solución).

Es incompatible el sistema $\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x+2y=5 \end{array}\right\}$

pues
$$\begin{array}{ll} (1) & x+y=3 \\ (2) & 2x+2y=5 \end{array} \Bigg| \longrightarrow \begin{array}{ll} (1) & x+y=3 \\ (2')=(2)-2(1) & 0=-1 \end{array}$$

Si resulta alguna ecuación de la forma $0x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + x_n = 0$, la ecuación de (2) que ocupa el lugar de ésta es combinación lineal de otras, y se prescindirá de ella, ya que el sistema que queda es equivalente al primitivo.

Si al aplicar el método de Gauss no resulta ninguna ecuación absurda, el sistema es **compatible** (tiene solución). Después de eliminar las ecuaciones que son combinación lineal de otras nos quedará un sistema de **h** ecuaciones (siendo $h \leq n$) con **n** incógnitas que es equivalente al dado.

$h = n \Rightarrow$ el sistema es **compatible determinado** (tiene una sola solución)

$h < n \Rightarrow$ el sistema es **compatible indeterminado** (tiene infinitas soluciones)

Sea el sistema final:

$$\left.\begin{array}{r} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1h}x_h + c_{1h+1}x_{h+1} + \cdots + c_{1n}x_n = p_1 \\ c_{22}x_2 + \cdots + c_{2h}x_h + c_{2h+1}x_{h+1} + \cdots + c_{2n}x_n = p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{hh}x_h + c_{hh+1}x_{h+1} + \cdots + c_{hn}x_n = p_h \end{array}\right| \quad (7)$$

en el que $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{hh}$ son distintos de cero.

Para resolver el sistema (7), si $h = n$, se halla el valor de x_n de la última ecuación, el valor obtenidos se introduce en la penúltima ecuación y se halla el valor de x_{n-1}, y así se continua en orden ascendente hasta obtener el valor de x_1.

Sea el sistema
$$\left.\begin{array}{r} -x+2y+3z=3 \\ 2x+3y-2z=5 \\ 3x+8y-z=13 \\ x-2y+6z=6 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{lr} (1) & -x+2y+3z=3 \\ (2) & 2x+3y-2z=5 \\ (3) & 3x+8y-z=13 \\ (4) & x-2y+6z=6 \end{array} \Bigg| \longrightarrow \begin{array}{lr} (1) & -x+2y+3z=3 \\ (2')=(2)+2(1) & 7y+4z=11 \\ (3')=(3)+3(1) & 14y+8z=22 \\ (4')=(4)+(1) & 9z=9 \end{array} \Bigg| \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & -x+2y+3z=3 \\ (2') & 7y+4z=11 \\ (3'')=(3')-2(2') & 0+0=0 \\ (4') & 9z=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{el sistema dado es equivalente al sistema}$$

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y+3z=3 \\ 7y+4z=11 \\ 9z=9 \end{array}\right\}$$

que es compatible determinado (tiene una sola solución).

De la última ecuación se obtiene $z = 1$, llevando este valor a la segunda: $7y + 4 \cdot 1 = 11 \Rightarrow y = 1$. Llevando los valores de z e y hallados a la primera ecuación: $-x + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow x = 2$.

Si $h < n$, se dan valores arbitrarios a las $n - h$ incógnitas $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$ y se obtienen las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_h$ en función de estos valores.

Sea el sistema
$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - 2z &= 8 \\ -x + 3y + 4z &= 5 \\ 2x + 5y + 2z &= 13 \end{aligned}\right|$$

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x + 2y - 2z = 8 \\ (2) & -x + 3y + 4z = 5 \\ (3) & 2x + 5y + 2z = 13 \end{array} \Bigg| \longrightarrow \begin{array}{ll} (1) & 3x + 2y - 2z = 8 \\ (2') = 3(2) + (1) & 11y + 10z = 23 \\ (3') = (3) + 2(2) & 11y + 10z = 23 \end{array} \Bigg| \longrightarrow$$

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x + 2y - 2z = 8 \\ (2') & 11y + 10z = 23 \\ (3'') = (3') - (2') & 0 + 0 = 0 \end{array} \Bigg| \Rightarrow \text{ el sistema dado es equivalente al sistema}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - 2z &= 8 \\ 11y + 10z &= 23 \end{aligned}\right|$$

que es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

Las soluciones se obtienen haciendo $z = k$, y escribiendo el sistema de la forma:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 + 2k \\ 11y &= 23 - 10k \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad y = \frac{23}{11} - \frac{10}{11}k \qquad 3x = 8 + 2k - 2y = 8 + 2k - , \quad \frac{0}{11}k = \frac{62}{11} + \frac{42}{11}k \qquad x = \frac{62}{33} + \frac{42}{33}k$$

de donde resulta la solución general $\quad x = \dfrac{62}{33} + \dfrac{14}{11}k \;;\; y = \dfrac{23}{11} - \dfrac{10}{11}k \;;\; z = k$

A cada valor distinto de k corresponde una solución distinta.

SISTEMAS LINEALES HOMOGENEOS: Los sistema de ecuaciones lineales en que todos los términos independientes son nulos se llaman **sistemas homogéneos:**

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right| \quad (7)$$

Los sistemas homogéneos siempre tienen la solución $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, llamada solución trivial. Pueden o no tener otras soluciones distintas de la trivial.

A los sistema homogéneos se les puede aplicar el método de Gauss. Después de eliminar las ecuaciones que son combinación lineal de otras nos quedará un sistema de **h** ecuaciones ($h \leqslant n$) con **n** incógnitas, equivalente al dado.

$h = n \Rightarrow$ el sistema sólo tiene la solución trivial

$h < n \Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones

Si $n < n$, se dan valores arbitrarios a las $n-h$ incógnitas $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$ y se obtienen las incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_h$ en función de estos valores.

Sea el sistema
$$\left.\begin{aligned} -x + 3y + 4z &= 0 \\ 2x + 3y - 5z &= 0 \\ 3x + 9y - 6z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & -x + 3y + 4z = 0 \\ (2) & 2x + 3y - 5z = 0 \\ (3) & 3x + 9y - 6z = 0 \\ (4) & x + y - z = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (1) & -x + 3y + 4z = 0 \\ (2') = (2) + 2(1) & +9y + 3z = 0 \\ (3') = (3) + 3(1) & 18y + 6z = 0 \\ (4') = (4) + (1) & 4y + 3z = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & -x + 3y + 4z = 0 \\ (2') & 9y + 3z = 0 \\ (3'') = (3') - 2(2') & 0 + 0 = 0 \\ (4'') = 9(4') - 4(2') & 15z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ el sistema dado es equivalente al sistema}$$

$$\left.\begin{aligned} -x + 3y + 4z &= 0 \\ 9y + 3z &= 0 \\ 15z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que sólo tiene la solución trivial.

Sea el sistema
$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 0 \\ -x + 5y - z &= 0 \\ x + 8y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 3x - 2y + 4z = 0 \\ (2) & -x + 5y - z = 0 \\ (3) & x + 8y + 2z = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (1) & 3x - 2y + 4z = 0 \\ (2') = 3(2) + (1) & 13y + z = 0 \\ (3') = (3) + (2) & 13y + z = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 3x - 2y + 4z = 0 \\ (2') & 13y + z = 0 \\ (3'') = (3') - (2') & 0 + 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ el sistema dado es equivalente al sistema}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 0 \\ 13y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que tiene infinitas soluciones.

Las soluciones se obtienen haciendo $z = k$, y escribiendo:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= -4k \\ 13y &= -k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{13}k \qquad 3x = 2y - 4k = -\frac{2}{13}k - 4k = -\frac{54}{13}k \ ; \ x = -\frac{18}{13}k$$

de donde resulta la solución general: $x = -\frac{18}{13}k \ ; \ y = -\frac{1}{13}k \ ; \ z = k$

A cada valor valor distinto de k corresponde una solución distinta.

PROBLEMAS

1.1 Resolver, aplicando el método de Gauss, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x-2y-3z &= 3\\ 2x-\ y-4z &= 7\\ 3x-3y-5z &= 8 \end{aligned}\right|$$

(Univ. de Extremadura)

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&3\\2&-1&-4&7\\3&-3&-5&8\end{array}\right)\longrightarrow\begin{array}{l}(1)\\(2')=(2)-2\cdot(1)\\(3')=(3)-3\cdot(1)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&3\\0&3&2&1\\0&3&4&-1\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2')\\(3'')=(3')-(2')\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&3\\0&3&2&1\\0&0&2&-2\end{array}\right)\Rightarrow$$ el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{aligned} x-2y-3z &= 3\\ 3y+2z &= 1\\ 2z &= -2 \end{aligned}\right|\Rightarrow\quad z=-1\qquad 3y=1-2z=1+2=3\ ;\ y=1\qquad x=3+2y+3z=3+2-3=2$$

$$\boxed{x=2\ ;\ y=1\ ;\ z=-1}$$

1.2 Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 5x+3y+2z &= -2\\ x+\ y\quad\ &= \ \ 2\\ 2x-\ y+\ z &= \ \ 3 \end{aligned}\right|$$

(Univ. de Madrid)

Con el fin de facilitar los cálculos escribiremos el sistema de la forma:

$$\left.\begin{aligned} z+2x-\ y &= 3\\ x+\ y &= 2\\ 2z+5x+3y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&3\\0&1&1&2\\2&5&3&-2\end{array}\right)\longrightarrow \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3')=(3)-2\cdot(1)\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&3\\0&1&1&2\\0&1&5&-8\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3'')=(3')-(2)\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&3\\0&1&1&2\\0&0&4&-10\end{array}\right)\Rightarrow \text{el sistema dado es equivalente al sistema:}$$

$$\left.\begin{aligned} z+2x-y &= 3\\ x+y &= 2\\ 4y &= -10 \end{aligned}\right|\Rightarrow \quad y=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}\quad x=2-y=\frac{9}{2}\quad z=3-2x+y=-\frac{17}{2}$$

$$\boxed{x=\frac{9}{2}\ ;\ y=-\frac{5}{2}\ ;\ z=-\frac{17}{2}}$$

1.3 Resolver los sistemas $\left.\begin{aligned}x-5y&=-1\\3x+y&=5\end{aligned}\right|$ y $\left.\begin{aligned}-2x+10y&=2\\3x+y&=5\end{aligned}\right|$ justificando por qué tienen la misma solución. Sin hacer ningún cálculo, explicar cuál sería la solución del siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}x-5y&=-1\\-2x+10y&=2\\3x+y&=5\end{aligned}\right|$$

(Univ. de Valencia, 1991)

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad x-5y&=-1\\(2)\quad 3x+y&=5\end{aligned}\right\}\longrightarrow \left.\begin{aligned}(1)\qquad\qquad x-5y&=-1\\(2')=(2)-3(1)\qquad 16y&=8\end{aligned}\right\}\Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}\quad x=\frac{3}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}(3)\quad -2x+10y&=2\\(4)\quad 3x+y&=5\end{aligned}\right\}\longrightarrow \left.\begin{aligned}(3)\qquad\qquad -2x+10y&=2\\(4')=2(4)+3(3)\qquad 32y&=16\end{aligned}\right\}\Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}\quad x=\frac{3}{2}$$

Los dos sistemas son equivalentes, la ecuación (3) del segundo sistema es igual a la ecuación (1) del sistema multiplicada por -2, y la segunda ecuación de ambos sistemas es la misma.

El sistema $\left.\begin{aligned}x-5y&=-1\\-2x+10y&=2\\3x+y&=5\end{aligned}\right|$ tiene la segunda ecuación que es igual a la primera multiplicada por -2, o sea que la segunda ecuación es consecuencia de la primera. El sistema que resulta al tachar la segunda ecuación es equivalente al dado. Al ser el tercer sistema equivalente al primero, las soluciones pedidas son $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

1.4 **Resolver los sistemas**

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z &= 0 \\ 2x+y-z &= 1 \\ 3x+2y+z &= 10 \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} x-2y+z &= -1 \\ 2x+y-z &= 6 \\ 3x+2y+z &= 7 \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} x-2y+z &= -5 \\ 2x+y-z &= -1 \\ 3x+2y+z &= 5 \end{aligned}\right|$$

Como los coeficientes de las incógnitas son iguales en los tres sistemas, podemos disponer los cálculos así:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 & 7 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2)-2(1) \\ (3') = (3)-3(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 8 & -2 & 10 & 10 & 20 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = 5(3')-8(2') \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 14 & 42 & -14 & 28 \end{array}\right) \Rightarrow$$

los sistemas dados son equivalentes a los siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z &= 0 \\ 5y-3z &= 1 \\ 14z &= 42 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned} \quad ; \quad \left.\begin{aligned} x-2y+z &= -1 \\ 5y-3z &= 8 \\ 14z &= -14 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= -1 \end{aligned} \quad ;$$

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z &= -5 \\ 5x-3z &= 9 \\ 14z &= 28 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 3 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

1.5 **Una refinería compra petróleo a dos países A y B. Comprando 500 barriles al país A y 15.500 al país B resulta un precio medio de 19,875 dólares. Comprando 1.000 barriles al país A y 1.000 al B el precio medio es de 18 dólares por barril. ¿Cuánto cuesta el barril de crudo de cada país?**

(Univ. de Santiago)

Sean x ; y los precios del barril de los países A y B respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} 500x + 15\,500y &= (500 + 15\,500)\cdot 19{,}875 \\ 1\,000x + 1\,000y &= (1000 + 1\,000)\cdot 18 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{ll}(1): & 500x + 15\,500\,y = 318000 \\ (2): & 1000x + 1000\,y = 36000\end{array}\right| \Rightarrow \quad \begin{array}{ll}(1') = -\frac{1}{500}(1) & x + 31y = 636 \\ (2') = \frac{1}{1000}(2) & x + \ \ y = 36\end{array} \Bigg| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1') & x + 31y = 636 \\ (2'') = (1') - (2') & 30y = 600\end{array}\right| \Rightarrow \quad y = \frac{600}{30} = 20 \qquad x = 636 - 3y = 16$$

En el país A cuesta el barril 16 dólares y en B 20 dólares.

1.6 Hallar un número de 3 cifras sabiendo que suman 9; que si del número dado se resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198; y que además, la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos.

(Univ. de Salamanca)

Sea $\overline{cba}$ el número pedido:

$$a + b + c = 9 \qquad (1)$$

$$\overline{cba} - \overline{abc} = 198 \Rightarrow (a + 10b + 100c) - (c + 10b + 100a) = 198\,;\ -99a + 99c = 198\,;$$

$$-a + c = 2 \qquad (2)$$

$$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow a - 2b + c = 0 \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1); (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & a + b + c = 9 \\ (2) & -a \quad\ + c = 2 \\ (3) & a - 2b + c = 0\end{array}\right| \longrightarrow \quad \left.\begin{array}{ll}(1) & a + b + c = 9 \\ (2') = (2) + (1) & b + 2c = 11 \\ (3') = (3) + (2) & -2b + 2c = 2\end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & a + b + c = 9 \\ (2') & b + 2c = 11 \\ (3'') = (3') + 2(2') & 6c = 24\end{array}\right| \Rightarrow \quad c = 4 \qquad b = 11 - 2c = 3 \qquad a = 9 - b - c = 2$$

El número pedido es el 432.

1.7 Un estudiante observó durante los d días de sus vacaciones que:

a) Llovió siete veces, por la mañana o por la tarde.
b) Llovió una sola vez cada mañana o tarde lluviosa.
c) Si llovió por la tarde no llovió por la mañana de aquel día.
d) Hubo cinco tardes claras y seis mañanas claras.

Averiguar el número de días de vacaciones.

(Univ. de Madrid)

Sean m el número de mañanas lluviosas, y t el número de tardes lluviosas.

mañanas lluviosas + mañanas claras = días de vacaciones:

$$m + 6 = d \qquad (1)$$

tarde lluviosas + tarde claras = días de vacaciones:

$$t + 5 = d \qquad (2)$$

mañanas lluviosas + tarde lluviosas = 7

$$m + t = 7 \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) forman el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & m - d = -6 \\ (2) & -d + t = -5 \\ (3) & m + t = 7 \end{array}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (1) & m - d = -6 \\ (2) & -d + t = -5 \\ (3') = (3) - (1) & d + t = 13 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & m - d = -6 \\ (2) & -d + t = -5 \\ (3'') = (3') + (2) & 2t = 8 \end{array}\right| \Rightarrow \quad t = 4 \qquad d = t + 5 = 9 \qquad m = -6 + d = 3$$

Hubo 9 días de vacaciones.

1.8 **Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que, cuando uno pierda una partida, entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno de ellos posea en ese momento. Cada uno perdió una partida y al final cada uno tenía 24 pesetas. ¿Cuánto dinero tenía cada jugador al comenzar el juego?**

(Univ. de Castilla—La Mancha)

Puesto que la cantidad total de dinero que tienen entre los tres jugadores es igual al principio que al final, entre los tres jugadores reunen $24 \times 3 = 72$ pesetas.

Sean x las pesetas que tenía el jugador A antes de empezar el juego, y las que tenía el jugador B y z las que tenía el jugador C.

Si A pierde la primera partida, B pierde la segunda y C la tercera:

	Dinero de A	Dinero de B	Dinero de C
Al final de la 1.ª partida	$x - y - z$	$2y$	$2z$
Al final de la 2.ª partida	$2(x - y - x)$	$2y - (x - y - z) - 2z = 3y - x - z$	$4z$
Al final de la 3.ª partida	$4(x - y - z)$	$2(3y - x - z)$	$4z - 2(x - y - z) - (3y - x - z) = 7z - x - y$

de donde resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 72 \\ 4(x - y - z) &= 24 \\ 2(-x + 3y - z) &= 24 \\ -x - y + 7z &= 24 \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} x + y + z &= 72 \\ x - y - z &= 6 \\ -x + 3y - z &= 12 \\ -x - y + 7z &= 24 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \\ &(3) \\ &(4) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (1)+(2)&: \; 2x = 78 \; ; \\ (1)+(3)&: \; 4y = 84 \; ; \\ (1)+(4)&: \; 8z = 96 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\boxed{x = 39} \\ &\boxed{y = 21} \\ &\boxed{z = 12} \end{aligned}$$

1.9 El tío Evaristo tiene 10 litros de mezcla de agua y vino. Al probarla observa que es demasiado ligera; por lo que decide añadir una cierta cantidad de vino; y entonces la cantidad de agua es el 30% del total. Como sigue siendo ligera; añade de nuevo la misma cantidad de vino que antes; y entonces la cantidad de agua es el 20% del total. ¿Cuántos litros de vino se añaden en cada ocasión y cuántos hay de agua?

(Univ. del País Vasco)

Composición de la mezcla en litros:

	Agua	Vino	Total
Composición primitiva:	x	y	10
" al añadir z litros de vino:	x	$y+z$	$10+z$
" al añadir de nuevo z l. de vino:	x	$y+2z$	$10+2z$

Si en la segunda composición la cantidad de agua es el 30% del total:

$$\frac{x}{10+z} = \frac{30}{100} \Rightarrow 10x - 3z = 30 \qquad (1)$$

Si en la tercera composición la cantidad de agua es el 20% del total:

$$\frac{x}{10+2z} = \frac{20}{100} \Rightarrow 10x - 4z = 20 \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad 10x - 3z = 30 \\ &(2) \quad 10x - 4z = 20 \end{aligned}\right| \longrightarrow \begin{aligned} &(1) \\ &(2') = (1) - (2) \end{aligned} \quad \left.\begin{aligned} 10x - 3z &= 30 \\ z &= 10 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} x &= 6 \\ z &= 10 \end{aligned}$$

se añaden 10 litros de vino en cada ocasión y hay 6 litros de agua en cada una de las composiciones.

1.10 La edad de un padre es doble que la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años.

¿Qué edad tenía el padre en el momento del nacimiento de cada uno de sus hijos?

(Univ. de Castilla—La Mancha, 1991)

Sea x la edad actual del padre, y la del hijo mayor y z la del menor:

– la edad del padre es doble que la suma de las edades de los dos hijos:

$$x = 2(y + z) \qquad (1)$$

– hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos:

$$x - (y - z) = 3\{[y - (y - z)] + [z - (y - z)]\} \qquad (2)$$

– cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años:

$$[x + (y + z)] + [y + (y + z)] + [z + (y + z)] = 150 \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) forman, después de reducirlas, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x - 2y - 2z = 0 \\ (2) & x + 2y - 8z = 0 \\ (3) & x + 4y + 4z = 150 \end{array}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (1) & x - 2y - 2z = 0 \\ (2') = (2) - (1) & 4y - 6z = 0 \\ (3') = (3) - (2) & 2y + 12z = 150 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x - 2y - 2z = 0 \\ (2') & 4y - 6z = 0 \\ (3'') = 2(3') - (2') & 30z = 300 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{r} x = 50 \\ y = 15 \\ z = 10 \end{array}$$

La edad del padre cuando nació el primer hijo era $50 - 15 = 35$ y cuando nació el segundo hijo era $50 - 10 = 40$.

1.11 Tres gráficas representan las funciones $y = ax + 2$, $y = 6x - b$, $y = -x - 1$, respectivamente. Determina, si es posible, los valores de a y b para que:

1) las tres gráficas concurran en un punto;
2) las tres gráficas sean paralelas;
3) las tres gráficas se corten dos a dos.

(Univ. de Cantabria)

1). Las gráficas de las funciones dadas, por ser lineales en x e y, representan tres rectas.

Las tres rectas concurrirán en un punto si el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -ax + y = 2 \\ -6x + y = -b \\ x + y = -1 \end{array}\right|$$

es compatible determinado.

Aplicando el método de Gauss al sistema escrito de la forma:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & y + x = -1 \\ (2) & y - 6x = -b \\ (3) & y - ax = 2 \end{array}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (1) & y + x = -1 \\ (2') = (2) - (1) & -7x = 1 - b \\ (3') = (3) - (1) & -(1+a)x = 3 \end{array}\right| \longrightarrow$$

$$\begin{array}{ll} (1) & y + x = -1 \\ (2') & -7x = 1 - b \\ (3'') = -7(3') + (1+a)(2') & 0 = a - b - ab - 20 \end{array}$$

el sistema será compatible determinado si $\underline{a - b - ab - 20 = 0}$.

2) Las tres gráficas serán paralelas si los coeficientes angulares de las tres rectas son iguales:

$$a = 6 = -1$$

se llega a una contradicción, lo que nos dice que para ningún valor de a y b las tres rectas serán paralelas.

3) Si $a \notin \{-1, 6\}$, las tres rectas se cortarán dos a dos.

Si $a \in \{-1, 6\}$, la primera recta será paralela a alguna de las otras dos. Si $a = 6$ y $b = -2$, las dos primeras rectas son coincidentes.

1.12

Clasificar el siguiente sistema y, si fuese posible, resolverlo:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{array}\right|$$

(Univ. de La Laguna – Tenerife)

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - (1) \\ (3') = (3) - 2(1) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = (3') - (2') \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{ el sistema dado es equivalente al sistema}$$

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 3 \\ 3y - 4z = -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array}$$

que está formado por dos ecuaciones, linealmente independientes, con tres incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

De (b): $\quad 3y = -1 + 4z \Rightarrow y = -\frac{1}{3} + \frac{4z}{3}$

llevando este valor a (a): $\quad x = 3 + y - 3z = 3 - \frac{1}{3} + \frac{4z}{3} - 3z = \frac{8}{3} - \frac{5z}{3}$

haciendo $z = 3k$:

$$\boxed{x = \frac{8}{3} - 5k \ ; \quad y = -\frac{1}{3} + 4k \ ; \quad z = 3k}$$

1.13 Calcular el valor de m para que el siguiente sistema sea compatible:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=3 \\ x-3y=1 \\ 2x+\ \ y=m \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\left(\begin{array}{rr|r}1&2&3\\1&-3&1\\2&1&m\end{array}\right)\longrightarrow\begin{array}{l}(1)\\(2')=(2)-(1)\\(3')=(3)-2(1)\end{array}\left(\begin{array}{rr|r}1&2&3\\0&-5&-2\\0&-3&m-6\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2')\\(3'')=5(3')-3(2')\end{array}\left(\begin{array}{rr|r}1&2&3\\0&-5&-2\\0&0&5m-24\end{array}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y=3\\-5y=-2\\0=5m-24\end{array}\right|$$

La última igualdad será una incongruencia si $5m-24$ es distinto de 0, luego el sistema serácom patible si

$$5m-24=0\ \Rightarrow\ \boxed{m=\frac{24}{5}}$$

1.14 Hallar la relación que deben cumplir a, b y c para que el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y=a \\ -2x+5y=b \\ 4x+9y=c \end{array}\right|$$

tenga una única solución.

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\left(\begin{array}{rr|r}3&2&a\\-2&5&b\\4&9&c\end{array}\right)\longrightarrow\begin{array}{l}(1)\\(2')=3(2)+2(1)\\(3')=3(3)-4(1)\end{array}\left(\begin{array}{rr|l}3&2&a\\0&19&3b+2a\\0&19&3c-4a\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2')\\(3'')=(3')-(2')\end{array}\left(\begin{array}{rr|l}3&2&a\\0&11&3b-2a\\0&0&6a+3b-3c\end{array}\right)\Rightarrow\ \text{el sistema tenrá una sola solución si}$$

$$6a+3b-3c=0\ \Rightarrow\ \boxed{c=2a+b}$$

1.15 Discutir y, en su caso, resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+\ z=0 \\ y+\ z=2 \\ y+2z=a \end{array}\right|$$

(Univ. de Valladolid)

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&1&2\\0&1&2&a\end{array}\right)\longrightarrow\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3')=(3)-(2)\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&1&2\\0&0&1&a-2\end{array}\right)\longrightarrow$$

el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=0\\y+z=2\\z=a-2\end{array}\right|\Rightarrow\begin{array}{l}x=-y-z=-4+a-a+2=-2\\y=2-z=2-a+2=4-a\\z=a-2\end{array}$$

$$\boxed{x=-2\;;\quad y=4-a\;;\quad z=a-2}$$

Cualquiera que sea el valor del parámetro a, existe una solución del sistema, o sea que éste es compatible determinado.

1.16 Determinar a para que el sistema

$$\left.\begin{array}{r}4x\qquad-4z=0\\x-y+az=0\\-x-ay-z=0\end{array}\right|$$

tenga solución distinta de la trivial.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\begin{pmatrix}4&0&-4\\1&-1&a\\-1&-a&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{matrix}(1)\\(2')=4(2)-(1)\\(3')=(3)+(2)\end{matrix}\begin{pmatrix}4&0&-4\\0&-4&4a+4\\0&-a-1&-1+a\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2')\\(3')=-4(3')+(a+1)2'\end{matrix}\begin{pmatrix}4&0&-4\\0&-4&4a+4\\0&0&4a^2+4a+8\end{pmatrix}$$

Si $4a^2+4a+8\neq 0$, el sistema sólo tiene la solución trivial: $x=y=z=0$, y si $4a^2+4a+8=0$, el sistema tiene infinitas soluciones:

$$4a^2+4a+8=0\Rightarrow a=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot4\cdot8}}{2\cdot4}=\frac{-4\pm\sqrt{-112}}{8}$$

no hay ningún valor real de a para el que el sistema tiene solución distinta de la trivial.

1.17 Discutir y resolver, según los valores de a, el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x+\;2y\;\;+z=0\\x+(a+2)y+2z=0\\x+(2-a)y+(a-2)z=0\end{array}\right|$$

(Univ. de Madrid)

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x+2y+z=0\\ (2) & x+(a+2)y+2z=0\\ (3) & x+(2-a)y+(a-2)z=0\end{array}\right\}\longrightarrow \left.\begin{array}{ll}(1) & x+2y+z=0\\ (2')=(2)-(1) & ay+z=0\\ (3')=(3)-(1) & -ay+(a-3)z=0\end{array}\right\}\longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x+2y+z=0\\ (2') & ay+z=0\\ (3'')=(3')+(2') & (a-2)z=0\end{array}\right\}$$

Si $a \neq 2$, las tres ecuaciones son linealmente independientes, sólo existe la solución trivial.
Si $a = 2$, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+z=0\\ 2y+z=0\end{array}\right\}$$

como el sistema tiene dos ecuaciones linealmente independientes con tres incógnitas, tiene infinitas soluciones.

De la última ecuación: $z=-2y$

llevando este valor a la primera ecuación: $x=-2y+2y=0$

haciendo $y=k$, tenemos la solución general:

$$\boxed{x=0\ ;\ y=k\ ;\ z=-2k}$$

1.18 Se considera el sistema

$$\left.\begin{array}{r}x-y+z=1\\ 2x-y+z=m\\ 3x+2y-mz=4\end{array}\right\}$$

a) Discutir el sistema según los valores m.
b) Resolver el sistema para $m=1$.

(Univ. de Madrid, 1991)

a)

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\2&-1&1&m\\3&2&-m&4\end{array}\right)\longrightarrow \begin{array}{l}(1)\\(2')=(2)-2(1)\\(3')=(3)-3(1)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&1&-1&m-2\\0&5&-m-3&1\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2')\\(3'')=(3')-5(2')\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&1\\0&1&-1&m-2\\0&0&-m+2&11-5m\end{array}\right)$$

Si $\underline{-m+2\neq 0, m\neq 2}$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (una sola solución)

Si $\underline{m=2}$, la última igualdad al aplicar Gauss será: $0=1$, absurdo, el sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución).

b) Para $m = 1$, el sistema resultante al aplicar Gauss es:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 1 \\ y - z = -1 \\ z = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -1 + z = -1 + 6 = 5 \\ z = 6 \end{array} \quad x = 1 + y - z = 1 + 5 - 6 = 0$$

1.19 Discutir y resolver según los valores de a el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{array}\right|$$

(Univ. de Santiago, 1991)

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = a(2) - (1) \\ (3') = (3) - (2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & a^2-1 \\ 0 & 1-a & a-1 & a^2-a \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = (1+a)(3') + (2') \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & a-1 & a^2-1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a^3+a^2-a-1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (a+1)(a-1) & a-1 & (a+1)(a-1) \\ 0 & 0 & (a+2)(a-1) & (a-1)(a+1)^2 \end{array}\right)$$

Si $\underline{a \notin \{1, -2\}}$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una solución)

El sistema es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 1 \\ (a+1)(a-1)\,y + (a-1)z = (a+1)(a-1) \\ (a+2)(a-1)z = (a-1)(a+1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad z = \frac{(a-1)(a+1)^2}{(a+2)(a-1)} = \frac{(a+1)^2}{a+2}\,;$$

$$y = \frac{(a+1)(a-1) - (a-1)\dfrac{(a+1)^2}{a+2}}{(a+1)(a-1)} = 1 - \frac{a+1}{a+2} = \frac{1}{a+2}\,;$$

$$x = \frac{1 - \dfrac{1}{a+2} - \dfrac{(a+1)^2}{a+2}}{a} = \frac{a+2-1-a^2-2a-1}{a(a+2)} = \frac{a(-a-1)}{a(a+2)} = \frac{-a-1}{a+2}$$

Si $\underline{a = 1}$, por Gauss hubiésemos llegado al cuadro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$ el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones)

El sistema dado es equivalente al formado por la ecuación

$$x + y + z = 1 \qquad x = 1 - y - z$$

haciendo $y = k$, $z = h$, tenemos la solución general

$$\boxed{x = 1 - k - h \quad ; \quad y = k \quad ; \quad z = h}$$

Si $a = -2$, por Gauss hubiéramos llegado al cuadro

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

la última línea equivale a decir que $0 = -3$, absurdo, luego el sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

1.20 **Determinar, si existen, los valores del parámetro a para que el sistema**

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + 2z = 3 \\ 4x + y + az = 4 \\ -6x + 4y - 6z = -2 \end{array}\right|$$

sea compatible pero indeterminado.

(Univ. de Cantabria)

El sistema será compatible indeterminado si al aplicar Gauss nos resulta al menos una fila de ceros, ya que al tener el sistema tres incógnitas el número máximo de ecuaciones linealmente independientes tiene que ser dos:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & a & 4 \\ -6 & 4 & -6 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - 4(1) \\ (3') = (3) + 6(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & a-8 & -8 \\ 0 & 22 & 6 & 16 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') \\ (3'') = (3') + 2(2') \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -11 & a-8 & -8 \\ 0 & 0 & 2a-10 & 0 \end{array}\right)$$

el sistema será compatible indeterminado si $2a - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 5}$

1.21 **Determinar a, para que el sistema**

$$\left.\begin{array}{r} 4x \qquad - 4z = 0 \\ x - y + az = 0 \\ -x - ay - z = 0 \end{array}\right|$$

tenga infinitas soluciones.

(Univ. de Madrid, 1992)

Este sistema homogéneo tendrá infinitas soluciones si al aplicar el método de Gauss no resulta ninguna ecuación absurda, y al eliminar las ecuaciones que son combinación lineal de otras nos queda un sistema con un número de ecuaciones menor que tres (número de incógnitas).

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & 4x \quad -4z = 0 \\ (2) & x-y+az = 0 \\ (3) & -x-ay-z = 0\end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{ll}(1) & 4x \quad -4z = 0 \\ (2')=(2)-\frac{1}{4}(1) & -y+(a+1)\,z = 0 \\ (3')=(3)+\frac{1}{4}(1) & -ay - \quad 2z = 0\end{array}\Bigg| \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & 4x \quad -4z = 0 \\ (2') & -y+(a+1)z = 0 \\ (3'')=(3')-a\,(2') & -(2+a^2+a)z = 0\end{array}\right|$$

$a^2+a+2=0 \Rightarrow a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-7}}{2} \Rightarrow$ no hay ningún valor real de a que anule el coeficiente de la última ecuación. Esto implica que las tres ecuaciones son linealmente independientes. El sistema sólo tiene la solución trivial cualquiera que sea el valor de a.

1.22 Determinar para qué valores de a el siguiente sistema es compatible determinado. Hallar la solución en estos casos.

$$\left.\begin{array}{r}x \quad -y = 1 \\ -x \quad +2y = a \\ -x+(a+1)y = a\end{array}\right|$$

(Univ. de Cantabria, 1992)

El sistema será compatible determinado si al aplicar el método de Gauss no resulta ninguna ecuación absurda, y después de eliminar las ecuaciones que son combinación lineal de otras nos quedan un sistema de dos ecuaciones (igual al número de incógnitas).

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x- \quad y = 1 \\ (2) & -x+ \quad 2\,y = a \\ (3) & -x+(a+1)\,y = a\end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{ll}(1) & x-y = 1 \\ (2')=(2)+(1) & y = 1+a \\ (3')=(3)+(1) & a\,y = 1+a\end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x-y=1 \\ (2') & y=1+a \\ (3')=(3')-a(2') & 0=1-a^2\end{array}\right|$$

la última ecuación no será una ecuación absurda si: $1-a^2=0 \Rightarrow a=\pm 1$.

$a \in \{-1, 1\}$: SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única)

Para $\underline{a=-1}$, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x-y=1 \\ y=0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=1} \boxed{y=0}$$

Para $\underline{a=1}$, el sistema dado es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r}x-y=1 \\ y=2\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=3} \boxed{y=2}$$

CAPITULO 2

MATRICES

MATRICES.

Se llama **matriz real de dimensión** m×n **o de orden** m×n, al conjunto de m·n números reales ordenados en m filas y n columnas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Los m·n números reales a_{ij} se llaman *términos* o *elementos* de la matriz. Los números naturales i y j designan, respectivamente, la fila y la columna a las que pertenece el elemento a_{ij}.

Las matrices se suelen representar por letras mayúsculas, A, B, ..., o $A_{m \times n}$, $B_{p \times q}$, ... cuando sea conveniente indicar su dimensión, o bien por (a_{ij}), (b_{ij}), ... o $(a_{ij})_{m \times n}$, $(b_{ij})_{p \times q}$ ...

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Se dice que una línea (fila o columna) es *combinación lineal* de otras líneas paralelas a ella $l_1, l_2, \ldots$ cuando resulta de sumar éstas, multiplicadas respectivamente por números $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ cualesquiera.

En la matriz anterior, $A_{3\times 2}$, la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras, ya que es igual a la primera más la segunda multiplicada por 2.

Dos matrices son *equidimensionales* si tienen el mismo número de filas y el mismo número de columnas.

El conjunto de matrices equidimensionales, de m filas y n columnas se simboliza por $\mathscr{M}_{m \times n}$.

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son *iguales* si son equidimensionales e iguales todos los elementos correspondientes.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad y \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

serán iguales si y solo si a = 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5 y f = 6.

Matriz nula es la que tiene todos sus elementos iguales a 0. Se simboliza por $O_{m\times n}$ o por O cuando no haya duda de su dimensión.

Son matrices nulas:

$$O_{2\times 3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \quad ; \quad O_{3\times 1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad O_{3\times 3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Matriz fila es la que tiene una sola fila: $A_{1\times n}$, y **matriz columna** es la que tiene una sola columna $B_{m\times 1}$.

$$A_{1n}=\begin{bmatrix}a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n}\end{bmatrix} \qquad B_{m1}=\begin{bmatrix}b_{11}\\b_{21}\\\vdots\\b_{m1}\end{bmatrix}$$

Matriz opuesta de la matriz $A=(a_{ij})$ es la matriz $B=(-a_{ij})$. Se escribe: $B=-A$.

La matriz opuesta de $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix}-a&-b\\-c&-d\\-e&-f\end{bmatrix}$

Matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas.

Las matrices cuadradas de n filas y n columnas, o sea de dimensión $n\times n$, diremos simplemente que son de orden n.

Se llama *diagonal principal* de una matriz cuadrada a la formada por los elementos a_{ii}. La otra diagonal se llama *secundaria* (la formada por los elementos a_{ij} tales que $i+j=n+1$)

Se llama *traza* de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de la diagonal principal.

$$\operatorname{Tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

En una matriz cuadrada se llama *conjugado* del elemento a_{ij} al elemento a_{ji}

Matriz diagonal es la matriz cuadrada cuyos términos no situados en la diagonal principal son nulos.

$$\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix}3&0&0\\0&-2&0\\0&0&6\end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

Matriz escalar es la matriz diagonal que tiene iguales todos los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{bmatrix} \qquad (k\neq 0)$$

Matriz unidad es la matriz diagonal que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1.

La matriz unidad de orden n se simboliza por I_n, o por I cuando no hay duda sobre su orden.

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \quad ; \quad I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Matriz triangular es la matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos situados por encima o por debajo de la diagonal principal.

Es triangular superior si son nulos los elementos situados por debajo de la diagonal principal, y triangular inferior si son nulos los elementos situados por encima de la diagonal principal.

La matriz $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ es triangular superior, y $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ es triangular inferior.

Matriz simétrica es la matriz cuadrada que tiene iguales sus elementos conjugados, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i y todo j.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

Matriz antisimétrica es la matriz cuadrada que verifica la propiedad: $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo valor de i y todo valor de j. Los elementos de la diagonal principal son nulos.

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

SUMA DE MATRICES.

La **suma o adición** de dos matrices A y B del mismo orden, $m \times n$, es otra matriz C, de orden $m \times n$, cuyos elementos se obtienen sumando los elementos de A y B que ocupan lugares homólogos.

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} \cdots b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \cdots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \cdots a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} \cdots a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Dos matrices se podrán sumar si y solo si son equidimensionales.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4 & 3+2 & -1+3 \\ -2+1 & 4+2 & 2-4 \\ 5+2 & 6-4 & -3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices:

1º La suma de matrices es ley de composición interna.

$$\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_{m \times n})^2: \qquad A + B = C \in \mathscr{M}_{m \times n}$$

2º Propiedad asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C \quad \forall (A, B, C) \in (\mathscr{M}_{m \times n})^3$

3º Existe el elemento neutro. Este es la matriz nula de orden $m \times n$, que simbolizaremos por **O**.

4º Existe el elemento simétrico o **matriz opuesta**.

$$\forall A \in \mathscr{M}_{m \times n} \quad \exists -A \in \mathscr{M}_{m \times n} \quad / \quad A + (-A) = O$$

5º Propiedad conmutativa: $A + B = B + A \quad \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{m \times n})^2$

Por cumplir las cinco propiedades anteriores, el conjunto de matrices $\mathcal{M}_{m \times n}$, tiene estructura de grupo abeliano respecto de la suma.

PRODUCTO DE MATRICES.

Dadas las matrices $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$ y la matriz $B = (b_{ij})$ de dimensión $n \times p$, se llama producto de A por B a la matriz $C = (c_{ij})$ de dimensión $m \times p$, en donde el elemento genérico c_{ij} es igual a la suma de los productos siguientes: primer elemento de la fila i de A por el primero de la columna j de B, el segundo elemento de la fila i de A por el segundo de la columna j de B, . . . , el n-ésimo de la fila i de A por el n-ésimo de la columna j de B.

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{in}\, b_{nj} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik}\, b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \cdots b_{2p} \\ \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots b_{np} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{k=n} a_{1k}\, b_{k1} & \sum_{k=1}^{k=n} a_{1k}\, b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{k=n} a_{1k}\, b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{k=n} a_{2k}\, b_{k1} & \sum_{k=1}^{k=n} a_{2k}\, b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{k=n} a_{2k}\, b_{kp} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{k=n} a_{mk}\, b_{k1} & \sum_{k=1}^{k=n} a_{mk}\, b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{k=n} a_{mk}\, b_{kp} \end{bmatrix}$$

Sólo será posible el producto de A por B si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b \\ 3a+4b \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ 4a+5d+6g & 4b+5e+6h & 4c+5f+6i \end{bmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices:

– Propiedad asociativa:

$$A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} \cdot C_{p \times q}) = (A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}) \cdot C_{p \times q}$$

– Propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

$$A_{m \times n} \cdot (B_{n \times p} + C_{n \times p}) = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} + A_{m \times n} \cdot C_{n \times p}$$

$$(A_{m \times n} + B_{m \times n}) \cdot C_{n \times p} = A_{m \times n} \cdot C_{n \times p} + B_{m \times n} \cdot C_{n \times p}$$

– En general, no se verifica la propiedad conmutativa.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ 12 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -5 & 3 \\ 24 & -16 & 7 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A \cdot B \neq B \cdot A$$

Hay casos en que existe $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}$ y no existe $B_{n \times p} \cdot A_{m \times n}$, si $p \neq m$.

En los casos especiales en que $A \cdot B = B \cdot A$, se dice que las matrices A y B son *permutables.*

Solamente si A y B son permutables se podrá decir que $(A + B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$, pues en general $(A + B)^2 = (A + B)\,(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

– Toda matriz escalar de orden n conmuta con toda matriz cuadrada de orden n.

En particular, la matriz unidad I_n conmuta con cualqier matriz cuadrada de orden n, verificándose:

$$I_n \cdot A_n = A_n \cdot I_n = A_n$$

El elemento neutro, respecto de producto, de las matrices cuadradas de orden n es la matriz unidad I_n.

PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN NUMERO.

El producto de la matriz $A = (a_{ij})$, de orden $m \times n$, por el número real λ es la matriz $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$, de orden $m \times n$, cuyos elementos se obtienen multiplicando todos los elementos de A por λ.

$$\lambda \cdot A = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \dots \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \dots \lambda \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} \dots \lambda \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 15 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

El producto de una matriz por un número cumple las siguientes propiedades:

1º $\lambda\,(A + B) = \lambda A + \lambda B$

2º $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$

3º $\lambda (\mu\, A) = (\lambda \mu)\, A$

4º $1 \cdot A = A$

Por cumplir estas cuatro propiedades y las cinco anteriores de la suma, el conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ de matrices de orden $m \times n$, tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

MATRIZ TRANSPUESTA.

Matriz transpuesta de la matriz $A_{m \times n}$ es la matriz $B_{n \times m}$ que resulta de cambiar ordenadamente sus filas por sus columnas.

La matriz transpuesta de A se simboliza por A^t o por A'.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

Propiedades de la matriz transpuesta:

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(kA)^t = kA^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- Si A es simétrica: $A^t = A$
- Si A es antisimétrica: $(-A)^t = A$, o bien $-A = A^t$

MATRIZ INVERSA.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se dice que A tiene inversa si existe una matriz B, cuadrada de orden n, tal que $A \cdot B = I_n$. Se dice que B es la **matriz inversa** de A.

La matriz inversa de A, cuando existe, se simboliza por A^{-1}, verificándose:

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$$

La matriz inversa de A, cuando existe, es única.

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si es posible pasar, por transformaciones elementales sobre las filas, del cuadro

$$(A \mid I)$$

al cuadro

$$(I \mid A^{-1})$$

Una *transformación elemental* sobre las filas de una matriz es cualquiera de las operaciones siguientes:

– Multiplicar, o dividir, los elementos de una fila por un número.

– Cambiar entre sí dos filas

– Sumar a los elementos de una fila, multiplicados o no por un número, los correspondientes elementos de otra fila multiplicados por otro número.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2') = (2) - 2(1) \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\begin{matrix} (1') = (1) - (2') \\ (2') \end{matrix} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2')=(2)-3(1)\\(3')=(3)+4(1)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&5&-3&1&0\\0&0&2&4&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\begin{array}{l}(1)\\(2')\\(3'')=\frac{1}{2}(3')\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&5&-3&1&0\\0&0&1&2&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2'')=(2')-5(3'')\\(3'')\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-13&1&-\frac{5}{2}\\0&0&1&2&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-13&1&-\frac{5}{2}\\2&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Si en alguno de los pasos del cálculo de la matriz inversa de A, en la parte izquierda de la recta vertical aparece una fila de ceros o dos filas proporcionales, la matriz A no tiene inversa.

Sea $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\-2&1&3\\3&2&-1\end{bmatrix}$: $\quad\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\-2&1&3&0&1&0\\3&2&-1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2')=(2)+2(1)\\(3')=(3)-3(1)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\0&7&7&2&1&0\\0&-7&-7&-3&0&1\end{array}\right)\Rightarrow \text{A no tiene inversa.}$$

El cálculo de la matriz inversa de esta forma se conoce por *cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss.*

Las ecuaciones matriciales de la forma

$$AX+B=C \qquad (1)$$

cuando A es una matriz cuadrada e invertible se resuelven del siguiente modo:

$$AX+B=C\ \Rightarrow\ AX=C-B$$

multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}(C-B)\ \Rightarrow\ (A^{-1}A)X=A^{-1}(C-B)\ \Rightarrow\ IX=\boxed{X=A^{-1}(C-B)}$$

Encontrar una matriz X que satisfaga la ecuación $A\cdot X+B=C$, siendo

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\quad;\quad B=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\quad;\quad C=\begin{bmatrix}3&1&1\\2&0&0\end{bmatrix}$$

(Univ. de Santiago)

Veamos si A tiene inversa:

$$\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\2&3&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\qquad\begin{array}{l}(1)\\(2')=(2)-2(1)\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\0&3&-2&1\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\begin{array}{l}(1)\\(2'')=\frac{1}{3}(2')\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)\Rightarrow \text{A tiene inversa, siendo}\quad A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Comprobado que A tiene inversa, podemos operar de la siguiente forma:

$$AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(C-B) \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}(C-B) \Rightarrow$$

$$IX = X = A^{-1}(C-B)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

NOTA: En el capítulo siguiente, después de conocer la teoría de determinantes, se ampliará la teoría de la matriz inversa.

PROBLEMAS

2.1 Calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$ siendo A y B las matrices: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

(Univ. de Madrid, 1991)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 2(-2) + (-1)2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3-4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 & 3(-1) \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 & 1(-1) \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 3 & -2 \cdot 2 & -2(-1) \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

2.2 Obtener los valores de x, y, z, que verifiquen la siguiente ecuación matricial:

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Valencia)

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y+z \\ 2y+z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x+y+z \\ 2x+2y+z \\ -x+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & x+y+z=1 \\ (2) & 2x+2y+z=0 \\ (3) & -x+z=0 \end{array}\right| \longrightarrow \left.\begin{array}{ll} (1) & x+y+z=1 \\ (2')=(3)+(1) & y+2z=1 \\ (3')=(2)-2(1) & -z=-2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x=1-y-z=1+3-2=2 \\ y=1-2z=-3 \\ z=2 \end{array}$$

2.3 Resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} 2X + Y = A \\ 4X - 3Y = B \end{array}\right\}$

sabiendo que X e Y son matrices de dimensión 3 × 4, y

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 7 \\ -3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 13 & -4 & -21 \\ -11 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \left.\begin{array}{l} 2X + Y = A \\ 4X - 3Y = B \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - 2(1) \end{array} \left.\begin{array}{l} 2X + Y = A \\ -5Y = B - 2A \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Y = \frac{1}{5}(2A - B)}$$

$$2X = A - Y = A - \frac{1}{5}(2A - B) = \frac{1}{5}(3A + B) \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{10}(3A + B)}$$

$$X = \frac{1}{10}\left(\begin{bmatrix} -3 & 24 & 21 \\ -9 & 18 & 36 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & -4 & -21 \\ -11 & 12 & 14 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 20 & 0 \\ -20 & 30 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} -2 & 16 & 14 \\ -6 & 12 & 24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 & -4 & -21 \\ -11 & 12 & 14 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -15 & 20 & 35 \\ 5 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.4 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

comprobar que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad. Usando la fórmula anterior, calcular A^4.

(Univ. de Madrid)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5\cdot 5 + (-4)2 + 2(-4) & 5(-4) + (-4)(-1) + 2\cdot 4 & 5\cdot 2 + (-4)\cdot 1 + 2(-1) \\ 2\cdot 5 + (-1)2 + 1(-4) & 2(-4) + (-1)(-1) + 1\cdot 4 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 1(-1) \\ -4\cdot 5 + 4\cdot 2 + (-1)(-4) & -4(-4) + 4(-1) + (-1)4 & -4\cdot 2 + 4\cdot 1 + (-1)(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$2A - I = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

está comprobado que $A^2 = 2A - I$.

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I)(2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I =$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{bmatrix}$$

2.5 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ encontrar una de las matrices X cuadradas de orden 2 y simétricas tales que $AX = O$.

(Univ. de Madrid, 1991)

Sea $X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$ la matriz pedida.

$$AX = O \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3x - 3y & 3y - 3z \\ 2x - 2y & 2y - 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 3y = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{array}\right|$$

como las ecuaciones tercera y cuarta son, respectivamente, iguales a la primera y segunda multiplicadas por 2/3; el sistema que resulta de tachar dichas ecuaciones es equivalente al anterior:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 3y = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x = y \\ z = y \end{array} \Rightarrow x = y = z = k \Rightarrow X = \begin{bmatrix} k & k \\ k & k \end{bmatrix}$$

2.6 Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se pide:

1) Calcular la matriz $(A - I)^2$.
2) Haciendo uso del apartado anterior hallar A^4.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2+1 & 2-4+2 & -1+2-1 \\ -1+2-1 & -2+4-2 & 1-2+1 \\ -1+2-1 & -2+4-2 & 1-2+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como la matriz A^2 conmuta con I (en la multiplicación):

$$A^4 - I^2 = (A^2+I)(A^2-I) = (A^2+I)\cdot O = O \quad \Rightarrow \quad \boxed{A^4 = I^2 = I}$$

2.7 Si P y Q son dos matrices cuadradas de orden n, ¿es cierta, en general, la igualdad

$$P^2 + 2PQ + Q^2 = (P+Q)^2$$

(Univ. de León)

El producto de matrices cuadradas verifica la propiedad distributiva respecto de la suma, luego:

$$(P+Q)^2 = (P+Q)(P+Q) = P^2 + PQ + QP + Q^2$$

si PQ no es igual a QP: $P^2 + 2PQ + Q^2 \neq (P+Q)^2$.

La igualdad del enunciado sólo se verificará si P y Q, además de ser cuadradas, conmutan respecto del producto.

2.8 Probar que $A^n = 2^{n-1} A$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

Haremos la demostración por el método de inducción:

para $n = 1$: $A^1 = 2^{1-1} \cdot A = A$

" $n = 2$: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2^{2-1} \cdot A \quad \Rightarrow$

la fórmula se verifica para $n = 1$ y $n = 2$, suponiendo que $A^h = 2^{h-1} A$:

$$A^{h+1} = A^h \cdot A = (2^{h-1} A) A = 2^{h-1} \cdot A^2 = 2^{h-1} \cdot 2A = 2^h A = 2^{(h+1)-1} A \quad \Rightarrow$$ la fórmu-

es cierta también para $n = h+1$. Está demostrado que $A^n = 2^{n-1} A$.

2.9 Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Calcular A^{100}.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

viendo estos resultados podemos considerar que $A^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y de aquí $A^{h+1} = A^h \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h+1 & 1 & 0 \\ h+1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

que tiene la misma forma que A^h.

Está desmostrado por inducción que $A^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \end{bmatrix}$; luego: $A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.10 Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hallar A^n, para $n \in N$.

(Univ. de Cantabria)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ ;$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

la fórmula $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se cumple para $n = 1, 2$ y 3; suponiendo que también se cumple para $n = h$:

$$A^h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{h+1} = A^h \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

también se cumple para $n = h+1$.

Está demostrado, por el método de inducción que $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.11 Hallar la matriz B^n, siendo $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(Univ. de Málaga)

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot B$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = (3B) \cdot B = 3B^2 = 3(3B) = 3^2 B \;; \quad B^4 = B^3 \cdot B = (3^2 B) \cdot B = 3^2 \cdot B^2 = 3^2(3B) = 3^3 \cdot B$$

considerando estos resultados, podemos hacer la hipótesis de que $B^n = 3^{n-1} \cdot B$ (1)

de donde: $B^{n+1} = B^n \cdot B = (3^{n-1} B) \cdot B = 3^{n-1} \cdot B^2 = 3^{n-1}(3B) = 3^n \cdot B$

Está demostrado, por el método de inducción, que la fórmula (1) es cierta, luego

$$B^n = 3^{n-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.12 Dada la matriz: $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

calcular A^2, A^3 y A^{428}.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-15+3 & 20-20+4 & -4+5+0 \\ -12+12-3 & -15+16-4 & 3-4+0 \\ -12+12+0 & -15+16+0 & 3-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16-15+0 & 16-15-1 & 4-5+1 \\ -12+12+0 & -12+12+1 & -3+4-1 \\ -12+12+0 & -12+12+0 & -3+4+0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad ; \qquad 428 = 142 \times 3 + 2 \Rightarrow A^{428} = A^{142 \times 3 + 2} = A^{142 \times 3} \cdot A^2 =$$

$$= (A^3)^{142} \cdot A^2 = I^{142} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.13 Comprobar que la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ verifica la relación $A^2 + I = O$ donde:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtener una matriz B, distinta de ± A, que también verifique la relación $B^2 + I = O$.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$A^2 + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sea $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$: $\quad B^2 + I = O \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc+1 & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2+bc+1=0 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2+bc+1=0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

De (2): $b(a+d) = 0 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} b = 0 \;\Rightarrow \text{ llevando este valor a (1): } a^2+1=0\ ;\ a^2=-1, \\ \quad \text{ó} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{imposible luego } b \neq 0 \\ a+d=0 \;\Rightarrow\; d=-a \quad (5) \end{array} \right.$

Con el mismo razonamiento, de (3) y (4) se obtiene que $c \neq 0$.

De (1): $bc = -a^2 - 1 \;\Rightarrow\; c = \dfrac{-a^2-1}{b}$; a cada par de valores de a y b obtendremos un valor de c, por ejemplo, para $a = 1$ y $b = 1$: $c = -2$, y de (5) $d = -1$, resultando la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

2.14 Un fabricante produce tres tipos de clavos: de aluminio (A), de cobre (Q) y de acero (H). Todos ellos se fabrican en longitudes de 1; 1,5; 2 y 2,5 centímetros con los precios respectivos siguientes:

Clavos A:	0,20	0,30	0,40	0,50	pts.
Clavos Q:	0,30	0,45	0,60	0,75	pts.
Clavos H:	0,40	0,60	0,80	1	pts.

Sabiendo que en un minuto se producen:

De 1 cm de longitud:	100 A	50 Q	700 H
De 1,5 cm de longitud:	200 A	20 Q	600 H

De 2 cm de longitud:	500 A	30 Q	400 H
De 2,5 cm de longitud:	300 A	10 Q	800 H

Se pide:

a) Resumir la información anterior en dos matrices, M y N. M será una matriz 3×4 que recoja la producción por minuto y N una matriz 4×3 que recoja los precios.

b) Calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz $M \cdot N$ y dar su significado.

c) Hacer lo mismo para la matriz $N \cdot M$.

(Univ. de Alicante)

a) Matriz de la producción por minuto:

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 1{,}5 & 2 & 2{,}5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 100 & 200 & 500 & 300 \\ 50 & 20 & 30 & 10 \\ 700 & 600 & 400 & 800 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{longitud de los clavos} \\ \leftarrow \text{clavos tipo A} \\ \leftarrow \text{" " Q} \\ \leftarrow \text{" " H} \end{array}$$

Esta matriz hay que interpretarla de la siguiente forma: por ejemplo, el elemento $a_{23} = 30$ significa que en un minuto se producen 30 clavos de 2 cm. de longitud del tipo Q, el elemento $a_{32} = 600$ significa que en un minuto se producen 600 clavos de 1,5 cm. de longitud del tipo H.

Matriz de los precios de los clavos según su longitud y tipo:

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & Q & H \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}40 \\ 0{,}30 & 0{,}45 & 0{,}60 \\ 0{,}40 & 0{,}60 & 0{,}80 \\ 0{,}50 & 0{,}75 & 1{,}00 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{tipo de los clavos} \\ \leftarrow \text{clavos de longitud } 1 \\ \leftarrow \text{" " " } 1{,}5 \\ \leftarrow \text{" " " } 2 \\ \leftarrow \text{" " " } 2{,}5 \end{array}$$

($b_{32} = 0{,}60$ significa que el clavo del tipo Q de 2 cm. de longitud vale 0,60 pesetas)

b) Si M es una matriz de dimensiones 3×4 y N una matriz 4×3, las dimensiones de $M \cdot N$ serán 3×3.

Si a los elementos de M los simbolizamos por a_{ij}, a los de N por b_{ij} y a los de $M \cdot N$ por c_{ij}:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41} = 100 \cdot 0{,}20 + 200 \cdot 0{,}30 + 500 \cdot 0{,}40 + 300 \cdot 0{,}50 = 430 \Rightarrow$$

el importe de los clavos del tipo A producidos en un minuto es 430 pesetas

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + a_{24}b_{42} = 50 \cdot 0{,}30 + 20 \cdot 0{,}45 + 30 \cdot 0{,}60 + 10 \cdot 0{,}75 = 49{,}5 \Rightarrow$$

el importe de los clavos del tipo Q producidos en un minuto es 49,5 pesetas

$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} + a_{34}b_{43} = 700 \cdot 0{,}40 + 600 \cdot 0{,}60 + 400 \cdot 0{,}80 + 800 \cdot 1 = 1760 \Rightarrow$$

el importe de los clavos del tipo H producidos en un minuto es 1760 pesetas.

c) La matriz $N \cdot M$ es de dimensiones 4×4. Simbolizaremos sus elementos por d_{ij}:

$d_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} = 0{,}20 \cdot 100 + 0{,}30 \cdot 50 + 0{,}40 \cdot 700 = 315 \quad \Rightarrow$

el importe de los clavos de 1 cm. producidos en un minuto es 315 ptas.

$d_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} = 0{,}30 \cdot 200 + 0{,}45 \cdot 20 + 0{,}60 \cdot 600 = 429 \quad \Rightarrow$

el importe de los clavos de 1,5 cm. producidos en un minuto es 429 pesetas.

$d_{33} = b_{31}a_{13} + b_{32}a_{23} + b_{33}a_{33} = 0{,}40 \cdot 500 + 0{,}60 \cdot 30 + 0{,}80 \cdot 400 = 538 \quad \Rightarrow$

el importe de los clavos de 2 cm. producidos en un minuto es 538 pesetas.

$d_{44} = b_{41}a_{14} + b_{42}a_{24} + b_{43}a_{34} = 0{,}50 \cdot 300 + 0{,}75 \cdot 10 + 1 \cdot 800 = 957{,}7 \quad \Rightarrow$

el importe de los clavos de 2,5 cm. producidos en un minuto es 957,7 pesetas.

2.15 Probar que la matriz A tiene inversa y calcularla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Cádiz)

Emplearemos el método de Gauss:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3') = (3) - m(4) \\ (4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - m(3') \\ (3') \\ (4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & m & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1') = (1) - m(2') \\ (2') \\ (3') \\ (4) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m & m^2 & -m^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -m & m^2 & -m^3 \\ 0 & 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.16 **Calcular la inversa de la matriz:**

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Salamanca)

Emplearemos el método de Gauss:

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2') = (2) + 2(1) \\ (3') = (3) + (1) \\ (4') = (4) + \frac{1}{2}(1) \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2') \\ (3'') = (3') - \frac{1}{2}(2') \\ (4') \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 5 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2') \\ (3'') \\ (4'') = (4') + 2(3'') \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 5 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{matrix} (1') = (1) - \frac{2}{25}(4'') \\ (2') \\ (3''') = (3'') - \frac{2}{5}(4'') \\ (4'') \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 4 & 2 & 0 & \frac{24}{25} & \frac{2}{25} & -\frac{4}{25} & -\frac{2}{25} \\ 0 & 10 & 5 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1'') = (1') - \frac{2}{5}(2') \\[6pt] (2'') = (2') + 2(3''') \\[6pt] (3''') \\[6pt] (4'') \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{25} & -\frac{8}{25} & -\frac{4}{25} & -\frac{2}{25} \\ 0 & 10 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{25}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1''') = -\frac{1}{2}(1'') \\[6pt] (2''') = \frac{1}{10}(2'') \\[6pt] (3'''') = -\frac{2}{5}(3''') \\[6pt] (4''') = \frac{2}{25}(4'') \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{25} & \frac{4}{25} & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{25} & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} & -\frac{2}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{25} & \frac{1}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{4}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{25} & -\frac{2}{25} & \frac{4}{25} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

2.17 Encontrar una matriz X que verifique la ecuación:

$$A \cdot X + B = C$$

siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

Veamos si A tiene inversa:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} (1) \\ (2') = (2) - (1) \\ (3') = (3) - (2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (1) \\[6pt] (2'') = \frac{1}{2}(2') \\[6pt] (3'') = \frac{1}{4}(3') \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$AX+B=C \Rightarrow AX=C-B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}(C-B) \Rightarrow (A^{-1}A)X=IX=\boxed{X=A^{-1}(C-B)}$$

$$X=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\2&4&2\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\-\frac{1}{2}&-1&0\end{bmatrix}$$

2.18 Hallar la matriz A que haga que $\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$

(Univ. de Madrid)

Sean $B=\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$

Veamos si C tiene inversa:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\quad\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\5&3&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\begin{matrix}(1)\\(2')=2(2)-5(1)\end{matrix}\quad\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&1&-5&2\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\begin{matrix}(1')=(1)-(2')\\(2')\end{matrix}\quad\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&6&-2\\0&1&-5&2\end{array}\right)\longrightarrow\begin{matrix}(1'')=\frac{1}{2}(1)\\(2')\end{matrix}\quad\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-1\\0&1&-5&2\end{array}\right)\Rightarrow$$

la matriz C tiene inversa, siendo $C^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$

$$B=AC \Rightarrow BC^{-1}=(AC)C^{-1}=A(CC^{-1})=A\cdot I=A$$

$$A=BC^{-1}=\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-15&-1+6\\12-10&-4+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12&5\\2&0\end{bmatrix}$$

CAPITULO 3

DETERMINANTES Y MATRIZ INVERSA

DETERMINANTES.

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Se llama determinante de la matriz A al polinomio cuyos términos son todos los posibles productos de n factores tomados entre los n elementos de A, de modo que en cada término haya un solo factor de cada fila y un solo factor de cada columna, y afectando a cada término del signo + o del − según que las permutaciones de los índices de las filas y las columnas sean de la misma o distinta clase.

Se recuerda que entre las n! permutaciones que se pueden formar con los n primeros números naturales, se llama permutación principal a la permutación 123 . . . . n.

En otra permutación cualquiera, se dice que dos elementos forman *inversión* cuando están en orden contrario que en la permutación principal. Se dice que una permutación es *par* o *impar*, según sea par o impar el número de sus inversiones.

Para hallar el número de inversiones de una permutación basta con comparar cada elemento con todos los que le siguen. En la permutación 3214, el 3 forma inversión con el 2 y con el 1, el 2 forma inversión con el 1, y el 1 no forma inversión con el 4. Hay, pues, tres inversiones, por tanto la permutación es impar.

Para hallar el signo de cada término del determinante, se ordenan los elementos que en él intervienen escribiendo en primer lugar el que pertenece a la primera fila, en segundo lugar el de la segunda fila, y así sucesivamente hasta escribir el de la última fila. De este modo, la permutación correspondiente a las filas será la principal, que es par, y sólo habrá que estudiar la permutación correspondiente a las columnas.

El número de términos de un determinante de orden n es $n!$

El determinante de la matriz cuadrada A de orden n se simboliza por $|A|$, o por det (A), o escribiendo los elementos de A entre dos rectas verticales:

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinantes de segundo orden.

Aplicando la definición:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

Un determinante de segundo orden es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - (-4)\cdot 2 = 3 + 8 = 11$$

Determinante de tercer orden.

Aplicando la definición:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

Los términos con signo + son el formado por los elementos de la diagonal principal y cada paralela a ella con el elemento del vértice opuesto. Los términos con signo − son el formado por los elementos de la diagonal secundaria y cada paralela a ella con el elemento del vértice opuesto. *(Regla de Sarrus).*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot9 + 4\cdot(-1)\cdot8 + 3\cdot6\cdot(-7) - 4\cdot5\cdot(-7) - 2\cdot6\cdot8 - 3\cdot(-1)\cdot9 =$$
$$= 90 - 32 - 126 + 140 - 96 + 27 = 3$$

Propiedades de los determinantes:

1. Un determinante que tiene todos los elementos de una línea (fila o columna) iguales a 0, es igual a 0.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

2. Un determinante que tiene dos líneas paralelas iguales es nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener la primera columna y la tercera iguales.}$$

3. Un determinante en el que los elementos de una línea son múltiplos de los elementos de una paralela a ella es nulo.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -8 & 2 & -6 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ porque la segunda fila es igual a la primera multiplicada por } -2.$$

4. Un determinante en el que los elementos de una línea son combinación lineal de los de otras líneas paralelas a ella es nulo.

$$\begin{vmatrix} a & d & a+2d \\ b & e & b+2e \\ c & f & c+2f \end{vmatrix} = 0, \text{ porque la tercera columna es igual a la primera más dos veces la segunda.}$$

5. El valor de un determinante no varía si se cambian las filas por las columnas sin alterar el orden relativo de los elementos de cada una. Es lo mismo que decir que el determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su matriz transpuesta: $|A^t| = |A|$.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

6. Un determinante no varía al sumar a los elementos de una línea los correspondientes de otra paralela a ella multiplicados por un número λ, los de otra multiplicados por μ, etc.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + 3b - 2c & b & c \\ d + 3e - 2f & e & f \\ g + 3h - 2i & h & i \end{vmatrix}$$

7. Si se cambian entre sí dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix}$$

8. Si se multiplican todos los elementos de una fila (o de una columna) por un mismo número λ, el valor del determinante queda multiplicado por λ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 5b & c \\ d & 5e & f \\ g & 5h & i \end{vmatrix} = 5 \cdot |A|$$

9. Si en un determinante todos los elementos de una línea son múltiplos de un número λ, se puede sacar este número como factor.

$$\begin{vmatrix} 6a & -4b & c \\ 6b & -4e & f \\ 6g & -4h & i \end{vmatrix} = 6 \cdot (-4) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

10. Si se multiplican todos los elementos de un determinante $|A|$ de orden n por un mismo número λ, el valor del nuevo determinante es $\lambda^n \cdot |A|$. Equivale a decir que $|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5a & 5b & 5c \\ 5d & 5e & 5f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} = 5^3 \cdot |A|$$

11. Si los elementos de una línea constan de h sumandos, se puede descomponer el determinante en suma de h determinantes que tienen iguales a él las restantes líneas, y en lugar de aquélla la formada por los primeros sumandos, por los segundos, . . ., y por los h–ésimos respectivamente.

$$\begin{vmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & a & d \\ x_2 + y_2 + z_2 & b & e \\ x_3 + y_3 + z_3 & c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & a & d \\ x_2 & b & e \\ x_3 & c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & a & d \\ y_2 & b & e \\ y_3 & c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z_1 & a & d \\ z_2 & b & e \\ z_3 & c & f \end{vmatrix}$$

Por ser idénticas las segundas columnas y las terceras:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 & -3 & 1 \\ 1+4 & 0 & 7 \\ 3+6 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

12. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & e & 0 & 0 \\ c & f & h & 0 \\ d & g & i & j \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot h \cdot j$$

Esta propiedad, junto con la 6. , nos facilita el cálculo del valor de un determinante, transformándolo en otro igual a él que tenga nulos los elementos situados por encima (o por debajo) de la diagonal principal.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -8 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (2')=(2)-2(1) & (3) & (4')=(4)+3(1) \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 9 \\ 3 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (2') & (3')=(3)+(2') & (4'')=(4')+3(2') \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -5 & -5 \\ -1 & 4 & 8 & 11 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (2') & (3') & (4''')=(4'')-(3') \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -5 & 0 \\ -1 & 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} \end{array} = 1 \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot 3 = 45$$

13. El determinante del producto de dos matrices cuadradas A y B, de igual orden, es igual al producto de los determinantes de A y de B: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} \; ; \; |A| = -12 \; ; \; |B| = 11 \Rightarrow |A| \cdot |B| = -132$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 17 & 25 \\ 11 & 31 & 43 \\ -8 & -10 & -16 \end{bmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 11 & 17 & 25 \\ 11 & 31 & 43 \\ -8 & -10 & -16 \end{vmatrix} = 11 \cdot 31 (-16) + 17 \cdot 43 \cdot (-8) + 25 \cdot 11 \cdot (-10) - 25 \cdot 31 \cdot (-8) - 17 \cdot 11 \cdot (-16) -$$
$$- 11 \cdot 43 \cdot (-10) = -5456 - 5848 - 2750 + 6200 + 2992 + 4730 = -132$$

14. Todo determinante nulo tiene, al menos, una fila (y una columna) que es combinación lineal de las restantes.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & -5 \\ 11 & -18 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 110 - 216 + 198 - 90 - 8 = 0$$

$$\begin{array}{c} (1) \qquad (2) \qquad (3) \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & -5 \\ 11 & -18 & -1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} (1) \qquad (2') = (2) + 2(1) \qquad (3') = (3) - 3(1) \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -17 \\ 11 & 4 & -34 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} (1) \qquad (2') \qquad (3'') = 2(3') + 17(2') \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 11 & 4 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(3'') = 2[(3) - 3(1)] + 17[(2) + 2(1)] = 2(3) + 28(1) + 17(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (3) = -14(1) - \frac{17}{2}(2)$$

la tercera columna es igual a la primera multiplicada por -14 más la segunda multiplicada por $-\frac{17}{2}$.

Si operamos sobre las filas obtendremos que la tercera fila es igual a la primera multiplicada por 2 más la segunda multiplicada por 3.

Menor complementario de un elemento. Si en un determinante $|A|$ de orden n se suprimen la fila de lugar i y la columna de lugar j, se obtiene un determinante de orden $n-1$ que se llama menor complementario del elemento a_{ij}. Se simboliza por α_{ij}.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad \alpha_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Adjunto del elemento a_{ij}, es igual al menor complementario del elemento a_{ij} afectado del signo $+$ o $-$ según que $i + j$ sea par o impar. Se simboliza por A_{ij}, siendo $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \alpha_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea. Un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea cualquiera por sus adjuntos correspondientes.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{14} \\ a_{13} A_{13} + a_{23} A_{23} + a_{33} A_{33} + a_{43} A_{43} \end{cases}$$

Esta propiedad facilita el cálculo de un determinante de orden n al poderlo expresar como suma de determinantes de orden $n-1$, éstos a su vez se expresarán en función de otros de orden $n-2$, etc. Así se llega a expresar el determinante primitivo en función de determinantes de segundo o tercer orden.

Desarrollando por los elementos de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 & -8 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & -8 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -8 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-6 + 48 - 48 + 18 +$$

$$+ 32 - 24) - 2(-12 + 36 + 24 - 9 + 64 - 18) + 3(32 + 18 + 3 + 12 + 12 - 12) = 20 - 2(85) + 3(65) = 45$$

La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos correspondientes a los elementos de una línea paralela, es nula. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de cuarto orden:

$$a_{11} \cdot A_{31} + a_{12} \cdot A_{32} + a_{13} \cdot A_{33} + a_{14} \cdot A_{34} = 0 \quad ; \qquad a_{13} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{22} + a_{33} \cdot A_{32} + a_{43} \cdot A_{42} = 0$$

Determinante de Vandermonde. Es el formado por las potencias sucesivas de n números distintos: $a, b, c, \ldots, g, h$, ordenadas del siguiente modo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a & b & c & \cdots & g & h \\ a^2 & b^2 & c^2 & \cdots & g^2 & h^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & \cdots & g^{n-1} & h^{n-1} \end{vmatrix}$$

Es igual al producto de todas las diferencias obtenidas restando cada número $a, b, c, \ldots, g, h$, de todos los que le siguen:

$$D = (b-a)\,(c-a)\ldots(g-a)\,(h-a)\cdot(c-b)\ldots(g-b)\,(h-b)\ldots(g-c)\,(h-c)\ldots(h-g)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \\ 2^2 & 4^2 & 7^2 & 9^2 \\ 2^3 & 4^3 & 7^3 & 9^3 \end{vmatrix} = (4-2)\,(7-2)\,(9-2)\,(7-4)\,(9-4)\,(9-7) = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 2100.$$

Matriz singular. Se llama así a la matriz cuadrada cuyo determinante es nulo.

Matriz regular. Se llama así a toda matriz cuadrada cuyo determinante es distinto de cero.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & a \end{bmatrix} \quad ; \quad |M| = 10a + 24 - 21 + 20 - 28 - 9a = a - 5$$

La matriz M es singular si $a = 5$, y es regular si $a \neq 5$.

MATRIZ INVERSA.

Sea A una matriz cuadrada y regular, de orden n. Se llama **matriz inversa** de A, a la matriz cuadrada de orden n, que se simboliza por A^{-1}, tal que:

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$$

La matriz A tendrá inversa si y solo si es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{bmatrix}$$

En la práctica, para hallar la matriz inversa de la matriz A, se hacen los siguientes pasos:

1º. Se halla el determinante de A. Sólo si $|A| \neq 0$ se continua, pues si $|A| = 0$ no existe la matriz inversa de A.

2º. Se escribe la transpuesta de A.

3º. Se sustituye cada elemento de A^t por su adjunto y se divide la matriz resultante por $|A|$.

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $|A| = 8 - 3 = 5$; $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: $|A| = 2$; $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -13 & 2 & -10 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si la matriz cuadrada A es de orden mayor que tres, el cálculo de su matriz inversa suele ser menos laborioso por el método de Gauss.

Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden y regulares, se verifica:

$$\boxed{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$$

Si A es una matriz regular, la transpuesta de la inversa de A es igual a la inversa de la transpuesta de A:

$$\boxed{(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}}$$

La matriz inversa facilita la resolución de la ecuaciones matriciales del tipo $AX = B$ cuando A es una matriz cuadrada regular:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$$

Sea reslover la ecuación $AX = B$, siendo $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 10 & 1 & 23 \end{bmatrix}$

Según hemos visto, como $|A| = 1 \neq 0$: $X = A^{-1}B$

Hallemos la matriz inversa de A:

$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 10 & 1 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Los sistemas de ecuaciones lineales de igual número de ecuaciones que de incógnitas, en los que la matriz de los coeficientes es regular se puede transformar en una ecuación matricial del tipo anterior:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z = b_1 \\ a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z = b_2 \\ a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z = b_3 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ecuación que podemos simbolizar así: $\quad AX = B$

Si $|A| \neq 0$: $\quad AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$

Sea resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -1 \\ x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 5y + 4z = 5 \end{array}\right|$$

El sistema se puede escribir de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad AX = B$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 8 + 5 - 6 - 10 + 8 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow$$

existe la inversa de A, y por lo tanto $AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$.

Hallemos la inversa de A:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -9 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = 2,\; y = 1,\; z = -1$$

PROBLEMAS

3.1 Calcular
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrid)

La tercera fila es igual a la primera multiplicada por 2, o sea que el determinante tiene dos filas proporcionales, por tanto es igual a 0.

3.2 Calcular
$$D = \begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrid)

Sacando factor común: a de la primera fila, b de la segunda y bc de la tercera:

$$D = ab^2c \begin{vmatrix} bc & -b & a \\ -bc & 2b & -a \\ bc & -b & 3a \end{vmatrix}$$

sacando factor común: bc de la primera columna, b de la segunda y a de la tercera:

$$D = (ab^2c)\,(b^2ca) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = a^2b^4c^2\,(6+1+1-2-1-3) = \boxed{2a^2b^4c^2}$$

3.3 ¿Qué diferencia existe entre menor complementario y adjunto de un elemento? Si hay alguna relación entre ambos conceptos, exprésala.

(Univ. de León)

En un determinante de orden n, el **menor complementario** del elemento a_{ij} es el determinante de orden n−1 que resulta al tachar, en el primitivo, la fila i y la columna j.

En un determinante de orden n, el **adjunto** del elemento a_{ij} es igual al producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante de orden n−1 que resulta al tachar, en el primitivo, la fila i y la columna j.

Si designamos por α_{ij} el menor complementario del elemento a_{ij} y por A_{ij} el adjunto de a_{ij} se verificará:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

si $i+j$ es un número par: $\quad A_{ij} = \alpha_{ij}$

" " " " " impar: $\quad A_{ij} = -\alpha_{ij}$

3.4 **Obtener, en función de a, b y c, el valor del determinante:**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrid)

Restando la primera fila a todas las demás y desarrollando después por los elementos de la última columna:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = (-1)abc = \boxed{-abc}$$

3.5 **Resolver, sin desarrollar, aplicando y justificando las propiedades utilizadas de los determinantes:**

$$D = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Córdoba)

Sacando a factor común de los elementos de la primera fila, b de los de la segunda y c de los de la tercera:

$$D = abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

restando la primera fila de las otras dos:

$$D = abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

desarrollando por los elementos de la primera columna:

$$D = a\,b\,c \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & (b+a)(b-a) \\ c-a & (c+a)(c-a) \end{vmatrix}$$

sacando factor común $(b-a)$ de los elementos de la primera fila y $(c-a)$ de los de la segunda fila:

$$D = a\,b\,c\,(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = \boxed{a\,b\,c\,(b-a)(c-a)(c-b)}$$

Se podrían haber simplificado los cálculos considerando que el determinante que queda después de la primera reducción es un determinante de Vandermonde.

3.6 **Calcular el valor del siguiente determinante:**

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 3a & 3b & 3c \\ 7a^2 & 7b^2 & 7c^2 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrid, 1991)

Sacando 5 factor común de la primera fila, 3 de la segunda y 7 de la tercera:

$$D = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

el determinante que nos queda es un determinante de Vandermonde:

$$D = \boxed{105\,(b-a)(c-a)(c-b)}$$

3.7 **Calcular el valor del determinante**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix}$$

(log simboliza el logaritmo decimal).

(Univ. de Alicante)

Es un determinante de Vandermonde, por tanto:

$$D = (\log 30 - \log 3)(\log 300 - \log 3)(\log 300 - \log 30) = \log \frac{30}{3} \cdot \log \frac{300}{3} \cdot \log \frac{300}{30} =$$

$$= \log 10 \cdot \log 100 \cdot \log 10 = 1 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{2}$$

3.8 Calcular

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Salamanca)

Restando a la primera fila la cuarta y a la segunda la tercera:

$$D = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & 0 & 0 & b^2-a^2 \\ 0 & a^2-b^2 & b^2-a^2 & 0 \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

sumando a la cuarta columna la primera, y a la tercera la segunda:

$$D = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 & 0 & 0 \\ ab & b^2 & a^2+b^2 & 2ab \\ b^2 & ab & 2ab & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

desarrollando este determinante por los elementos de la primera fila, así como el resultante:

$$D = (a^2-b^2)\begin{vmatrix} a^2-b^2 & 0 & 0 \\ b^2 & a^2+b^2 & 2ab \\ ab & 2ab & a^2+b^2 \end{vmatrix} = (a^2-b^2)\,(a^2-b^2)\begin{vmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-b^2)^2\,[\,(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\,] = (a^2-b^2)^2\,(a^4+b^4+2a^2b^2-4a^2b^2) =$$

$$= (a^2-b^2)^2\,(a^2-b^2)^2 = \boxed{(a^2-b^2)^4}$$

3.9 Sabiendo que D_1 = determinante de $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 1$

utilizando correctamente las propiedades de los determinantes, calcular

D_2 = determinante de $\begin{bmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{bmatrix}$

y D_3 = determinante de $\begin{bmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{bmatrix}$

(Univ. de Zaragoza)

Sumando a los elementos de la primera fila los correspondientes elementos de la segunda fila multiplicados por 3, el valor del determinante no varía:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a+3d & c+3f & b+3e \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & b \\ -d & -f & -e \\ g & i & h \end{vmatrix}$$

sacando (-1) factor común de los elementos de la segunda fila:

$$D_2 = (-1)\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$$

conmutando entre sí la segunda y la tercera columnas, el determinante cambia de signo:

$$D_2 = (-1)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = D_1 = 1$$

Cambiando entre sí, en D_3, la primera y tercera columnas, el determinante cambia de signo:

$$D_3 = \begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

cambiando entre sí la primera y segunda filas, el determinante cambia de signo:

$$D_3 = (-1)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = D_1 = 1$$

3.10 **Demostrar que**

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = -x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

(Univ. de Madrid)

Llamaremos D al determinante.

Desarrollando D por los elementos de la última columna:

$$D = (a-x)\cdot(-1)^{5+5}\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{4+5}\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b \end{vmatrix}$$

El primer determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal, ya que los elementos por debajo de esta diagonal son todos nulos. El segundo determinante lo desarrollamos por los elementos de la última columna:

$$D = (a-x)(-x)^4 - \left(b(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ e & d & c \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (a-x)x^4 - b(-x)^3 + (cx^2 + e + dx) = -x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

3.11 Dada la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

se pide: Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes hallar dos soluciones de la ecuación dada sin desarrollar el determinante del primer miembro.

(Univ. de Madrid)

a) Como un determinante es nulo si tiene dos filas (o columnas) iguales, el determinante dado se anulará si $x = 1$, pues en este caso la segunda fila es igual a la primera. Resulta de aquí que $x = 1$ es una raíz de la ecuación.

b) También para $x = -1$ la tercera fila es igual a la primera, luego $x = -1$ es otra raíz de la ecuación.

3.12 Sin desarrollarlo, demostrar que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

es igual a cero.

(Univ. de Madrid)

Sumando a la tercera columna la segunda, el determinante no varía:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$$

y este determinante es igual a cero puesto que tiene dos columnas proporcionales, la tercera es igual a la primera multiplicada por $a + b + c$.

3.13 Sin desarrollar los determinantes, demostrar la identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrid)

Haremos las siguientes operaciones:

1º) Sacar factor común a de la primera fila, b de la segunda y c de la tercera:

2º) Multiplicar la primera columna por abc:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & a & a^2 \\ \frac{1}{b} & b & b^2 \\ \frac{1}{c} & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{abc}{a} & a & a^2 \\ \frac{abc}{b} & b & b^2 \\ \frac{abc}{c} & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

3.14 Sin desarrollar ninguno de los dos determinantes, demostrar la identidad

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

(Univ. de Madrid)

Sumando a la primera columna las otras dos, en el primer determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 2(m+n+l) & n+l & l+m \\ 2(x+y+z) & y+z & z+x \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} a+b+c & b+c & c+a \\ m+n+l & n+l & l+m \\ x+y+z & y+z & z+x \end{vmatrix}$$

restando a la segunda y tercera columnas la primera:

$$D = 2 \begin{vmatrix} a+b+c & -a & -b \\ m+n+l & -m & -n \\ x+y-z & -x & -y \end{vmatrix}$$

sumando a la primera columna las otras dos:

$$D = 2 \begin{vmatrix} c & -a & -b \\ l & -m & -n \\ z & -x & -y \end{vmatrix}$$

sacando de la segunda columna y de la tercera factor común -1:

$$D = 2(-1)\cdot(-1) \begin{vmatrix} c & a & b \\ l & m & n \\ z & x & y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} c & a & b \\ l & m & n \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

intercambiando la primera columna con la segunda y tercera el determinante no varía, pues tendremos dos cambios de signo: $(-1)\cdot(-1) = 1$:

$$D = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

que es lo que queríamos obtener.

3.15 Demostrar que es 4 el valor máximo que puede tomar un determinante de tercer orden cuyos elementos son todos iguales a $+1$ ó $a - 1$.

(Univ. de Sevilla)

Si los elementos del determinante D son $+1$ ó -1, los términos del desarrollo de D:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (ceg + bdi + afh)$$

pertenecen al conjunto $\{1, -1\}$, luego los valores posibles de D son $6, 4, 2, 0, -2, -4, -6$.

Cualesquiera que sean los valores de a, b y c, sumando o restando a la segunda y tercera columna la primera, (según sean los signos de a, b y c) podemos reducir a 0 los elementos segundo y tercero de la primera fila. El determinante quedará de la forma:

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e \pm d & f \pm d \\ g & h \pm g & i \pm g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & m & n \\ g & p & g \end{vmatrix} = a(mg - np)$$

$a \in \{1, -1\}$ y m, g, n, p pertenecen al conjunto $\{0, 2, -2\}$, los valores posibles de $D = a(mg - np)$ son $8, 4, 0, -4, -8$.

De todo lo anterior se deduce que los valores posibles de D son $4, 0, -4$ y como existen valores de D igual a 4, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

el valor máximo que puede tomar D es 4.

(Como curiosidad indicaremos que al poder ser cada elemento de D igual a ± 1, la matriz D puede tener $2^9 = 512$ formas distintas).

3.16 Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

calcular $\dfrac{A+B}{2}$, $(A-B)^2$, A^{-1} y B^{-1}.

(Univ. de Oviedo)

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-3 & 2+2 \\ 2+2 & 3-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^2 = \begin{bmatrix} 1-(-3) & 2-2 \\ 2-2 & 3-(-1) \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4 = -1 \ ; \ A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \ ; \ A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = B \ \Rightarrow$$

$$B^{-1} = A$$

3.17 Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \ , \ D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Se pide:

a) $A \cdot B + C$

b) ¿Es cierto que $|AB + C| = |AB| + |C|$?

c) Calcular, si es posible D^{-1}

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

a)
$$A \cdot B + C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) No se verifica, en general, que el determinante de la suma de dos matrices es igual a la suma de los determinantes de las dos matrices.

En este caso:

$$\left.\begin{aligned} |AB+C| &= \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -5+6 = 1 \\ |A \cdot B| + |C| &= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (12+10) + (-4-3) = 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |AB+C| \neq |AB| + |C|$$

c) $|D| = -4-3 = -7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ existe D^{-1}

$$D^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad ; \quad D^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

3.18 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{bmatrix}$, averiguar para qué valores del parámetro m existe A^{-1}. Calcular A^{-1} para $m = 2$.

(Univ. de Castilla–La Mancha)

La matriz cuadrada A tendrá inversa si su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2+4m-3; \quad |A|=0 \Rightarrow m^2-4m+3=0 \Rightarrow$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa si $m \notin \{1, 3\}$.

Para $m = 2$: $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; $|A| = 1$; $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$;

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.19 **a) Calcular una matriz X que verifique la igualdad:**

$$A \cdot X = B \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X \cdot A = B$?

(Univ. de León)

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ existe la inversa de A.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \ ; \ (A^{-1}A)X = IX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$$

Hallemos la inversa de A:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ ; \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6 & 2+3 \\ -1+4 & -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

b) $$X \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8+5 & -12+10 \\ 6-3 & 9-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \neq B$$

Esto nos sirve de comprobación de que el producto de matrices no es conmutativo.

3.20 Obtén razonadamente una matriz A que verifique la siguiente igualdad:

$$3\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 15 \\ 12 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Valencia, 1991)

$$\text{Sea } M = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \; ; \; N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \; \text{ y } P = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 15 \\ 12 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

como $|N| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$, N admite matriz inversa:

$$M + NA = P \Rightarrow NA = P - M \Rightarrow N^{-1}(NA) = N^{-1}(P-M) \Rightarrow (N^{-1}N)A = IA = \boxed{A = N^{-1}(P-M)}$$

Hallemos N^{-1}:

$$N^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \; ; \quad N^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde: $$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 9 & 11 & 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 18-18 & 27-22 & 36-26 \\ 6+9 & 9+11 & 12+13 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 15 & 20 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

3.21 Resolver la ecuación matricial $\begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ siendo $abc \neq 0$.

(Univ. de Madrid)

Sean $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$, $|A| = -abc \neq 0$, A tiene inversa.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = \boxed{X = A^{-1}B}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & c \\ a & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & c \\ b & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-abc}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -ab \\ 0 & -ac & 0 \\ -bc & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f}{c} \\ \frac{e}{b} \\ \frac{d}{a} \end{bmatrix}$$

3.22 Hallar una matriz X tal que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

Sea $A \cdot X = B$: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 12 + 2 - 8 - 5 = 1 \Rightarrow$ la matriz A tiene inversa.

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \; ; \; (A^{-1}A)X = A^{-1}B \; ; \; IX = A^{-1}B \; ; \; \boxed{X = A^{-1}B}$$

Hallemos la inversa de A:

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 7 & -8 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 7 & -8 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 8 & 3 & 0 \\ 25 & -22 & -2 & 0 \\ -12 & 11 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3.23 Resolver la ecuación matricial ${}^tA \cdot X = B + C$, siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Salamanca)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \det({}^tA) = 1 \Rightarrow {}^tA \text{ tiene inversa.}$$

$${}^tA\cdot X = B + C \;\Rightarrow\; ({}^tA)^{-1}({}^tAX) = ({}^tA)^{-1}(B + C) \;\Rightarrow\; [({}^tA)^{-1}({}^tA)]X = \boxed{X = ({}^tA)^{-1}(B+C)}$$

Hallemos $({}^tA)^{-1}$:

$${}^t({}^tA) = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;;\qquad ({}^tA)^{-1} = \frac{1}{\det({}^tA)} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \;;\qquad X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.24 Encontrar una matriz A que verifique:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Explica cómo justificarías que la matriz obtenida es regular.

(Univ. de Valencia, 1991)

Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{bmatrix}$

$|B| = 6 \neq 0 \;\Rightarrow\;$ la matriz B tiene inversa.

$$BA = C \;\Rightarrow\; B^{-1}(BA) = B^{-1}C \;\Rightarrow\; (B^{-1}B)A = B^{-1}C \;\Rightarrow\; IA = \boxed{A = B^{-1}C}$$

Hallemos B^{-1}:

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \;;\quad B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = B^{-1}C = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 18 & 12 & 6 \\ 12 & 18 & 0 \\ 24 & 18 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz A es regular si es cuadrada y su determinante no es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -2+6 = 4 \neq 0 \Rightarrow A \text{ es regular}$$

Sin calcular la matriz A podíamos haber estudiado si es regular usando la igualdad $BA = C$:

$\underset{(3\times3)}{B} \cdot \underset{(a\times b)}{A} = \underset{(3,3)}{C} \Rightarrow a = 3,\ b = 3$; la matriz A es cuadrada de orden 3.

$$B \cdot A = C \Rightarrow |B \cdot A| = |C| \Rightarrow |B| \cdot |A| = |C|$$

$$|B| = 6\ ;\quad |C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -12+36 = 24$$

$$|B| \cdot |A| = |C| \Rightarrow 6 \cdot |A| = 24 \Rightarrow |A| = 4 \neq 0$$

3.25 Determinar una matriz cuadrada A de orden 2 tal que $A + A^t = 2I$, y $\det(A) = 2$, siendo I la matriz identidad, y A^t la transpuesta de la matriz A.

(Univ. de Madrid, 1991)

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

$$\left.\begin{array}{l} A + A^t = 2I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \det(A) = 2 \Rightarrow ad - bc = 2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 2a = 2 \\ b+c = 0 \\ 2d = 2 \\ ad-bc = 2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a = 1 \\ \qquad\qquad b = -c \\ d = 1 \\ \qquad\qquad 1 \cdot 1 - (c)c = 2\ ;\ c^2 = 1\ ;\ c = \pm 1 \end{array} \quad \left. b = \mp 1 \right| \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\ ;\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.26 Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ encontrar una matriz simétrica P no singular tal que $B = P^{-1}AP$.

(Univ. de Madrid)

Sea $P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ la matriz pedida, tal que $|P| \neq 0$.

$$B = P^{-1}AP \;\Rightarrow\; PB = P(P^{-1}AP) = (PP^{-1})AP = IAP = AP \;\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a+6b & -3a-5b \\ 4b+6c & -3b-5c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a-6b & 4b-6c \\ 3a-5b & 3b-5c \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 4a+6b &= 4a-6b \\ -3a-5b &= 4b-6c \\ 4b+6c &= 3a-5b \\ -3b-5c &= 3b-5c \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} &6b=-6b,\ b=0 \\ &3a=6c,\ a=2c \end{aligned}\right| \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix},\ c \neq 0$$

3.27 Hallar la matriz X que satisface a la ecuación $AXB+C=D$ siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix};\quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Univ. de Salamanca)

det. $A = 1$, det. $B = 1 \Rightarrow$ A y B tienen inversa.

$$AXB + C = D \;\Rightarrow\; AXB = D - C \;\Rightarrow\; A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}(D-C)B^{-1}$$

$$(A^{-1}A)X(BB^{-1}) = IXI = \boxed{X = A^{-1}(D-C)B^{-1}}$$

Hallemos las inversas de A y B:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; B^{-1} = \frac{1}{|B|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3.28 Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Mostrar que la inversa de A^n es, precisamente $\begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por la forma de A^2 y A^3 podemos suponer que:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \qquad A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

está demostrado, por inducción, que $\quad A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A^n| = 1 ; \quad {}^t(A^n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} ; \quad (A^n)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.29 **Hallar los valores de x para los cuales la matriz A no tiene inversa:**

$$A = \begin{bmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{bmatrix}$$

(Univ. del País Vasco)

$$\det. A = \begin{vmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{vmatrix} = 2\,|x| - |x-2|$$

Considerando que $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{para los valores de } x \text{ que hacen } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{para los valores de } x \text{ que hacen } f(x) < 0 \end{cases}$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{para } x \geq 0 \\ -x & \text{"} \quad x < 0 \end{cases}$$

$|x| = -x$ | 0 | $|x| = x$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{para } x \geq 2 \\ -(x-2) = -x+2 & \text{para } x < 2 \end{cases}$$

$|x-2| = -x+2$ | 2 | $|x-2| = x-2$

$$\det. A = 2\,|x| - |x-2| = \begin{vmatrix} 2(-x) - (-x+2) = -x-2 & \text{para} & -\infty < x < 0 \\ 2x \quad -(-x+2) = \ 3x-2 & " & 0 \leq x < 2 \\ 2x \quad -(x-2) \ = \ x+2 & " & 2 \leq x < +\infty \end{vmatrix}$$

La matriz A no tendrá inversa para los valores de x en que se anule el determinante de A.

En el intervalo $]-\infty\,,0[:\ -x-2=0 \Rightarrow x=-2$

En el intervalo $[0,2[:\ 3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$.

En el intervalo $[2,+\infty[$ no hay ningún valor de x que anule a $x+2$ (el valor -2 no pertenece a dicho intervalo).

La matriz A no tiene inversa si x es igual a -2 ó a $\frac{2}{3}$.

3.30 Enunciar la condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa.
Estudiar si son equivalentes las siguientes afirmaciones:
a) Las matrices A y B tienen inversa
b) AB tienen inversa.

(Univ. de Madrid)

La condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa es que ésta sea cuadrada y que su determinante sea distinto de cero.

Tal y como están redactadas, las afirmaciones a) y b) no son equivalentes:

Si A y B tienen inversas, son matrices cuadradas, pero si son de distinto orden no existe AB.

Si AB tiene inversa es una matriz cuadrada, pero puede que A y B no sean cuadradas, por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 13 \end{bmatrix} \ ;$$

$$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} \neq 0$$

$A\cdot B$ tiene inversa, pero A y B no tienen inversa por no ser matrices cuadradas.

Si el enunciado hubiera sido: *Siendo A y B matrices cuadradas del mismo orden estudiar si son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) las matrices A y B tienen inversa

b) AB tienen inversa

en este caso si son equivalentes. En efecto:

A, B y AB son matrices cuadradas

Si A y B tienen inversa: $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0 \Rightarrow |AB| = |A|\cdot|B| \neq 0 \Rightarrow AB$ tiene inversa.

Si AB tiene inversa $|AB| \neq 0 \Rightarrow |AB| = |A|\ |B| \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$ y $|B| \neq 0 \Rightarrow$ A y B tienen inversa.

3.31 **Siendo A, B y C matrices cuadradas del mismo orden, es sabido que de AB = AC no puede deducirse en todo caso que sea B = C. Probar, no obstante, que si $|A| \neq 0$, sí se puede obtener la conclusión B = C.**

(Univ. de Madrid)

Por ser A cuadrada y $|A| \neq 0$, A tiene inversa.

Multiplicando, por la izquierda, la igualdad $AB = AC$ por A^{-1}:

$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow$ (por la propiedad asociativa del producto de matrices)

$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow$ (por ser $A^{-1}A = I$, matriz unidad)

$$I \cdot B = I \cdot C \Rightarrow B = C$$

CAPITULO 4

PROGRAMACION LINEAL

PROGRAMACION LINEAL

La programación lineal trata de *optimizar* (calcular el máximo o mínimo) una función lineal F, llamada *objetivo*, sometido a *restricciones* (igualdades o desigualdades, de tipo lineal).

Un problema de programación lineal queda definido por:

a) Las variables del probema que reciben el nombre de *variables instrumentales,* que han de tomar valores iguales o mayores que cero. (Por indicación del programa de COU, nos limitaremos a dos variables).

b) La *función objetivo*, que es lineal: $F = mx + ny$

c) Las *condiciones o restricciones* del problema, dadas por igualdades o desigualdades lineales:

$$\left.\begin{array}{r} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right| \quad (1)$$

Las restricciones del tipo $\leq$ suelen representar limitaciones de recursos.

El conjunto $K \subset R^2$, cuyos elementos (x, y) satisfacen las restricciones (1) se llama *conjunto de oportunidades*.

Se llama *solución factible o posible* cualquier elemento del conjunto de oportunidades, y *solución óptima* a la solución (o soluciones factibles), para la que la función objetivo es óptima (alcanza su valor máximo o mínimo).

Las soluciones de los sistema de dos ecuaciones, elegidas entre las ecuaciones (1) sustituyendo el signo $\leq$ (o $\geq$) por el signo $=$, y que satisfacen a las restantes inecuaciones de (1), se llaman *vértices* de K.

La solución óptima (si existe) corresponde a vértices de K. Si la solución óptima se alcanza en los vértices (x_1, y_1) y (x_2, y_2), se alcanza también en los puntos del segmento cuyos extremos son dichos vértices, o sea en los punto de coordenadas:

$$(x, y) = (x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + (1-\lambda)(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + (1-\lambda)(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

Para investigar la solución óptima limitaremos el estudio a los vértices de K.

En la elaboración de dos tipos de refrescos R_1 y R_2 se utilizan (además de agua) dos tipos de productos A y B. Cada refresco del tipo R_1 contiene 3 gr de A y 3 gr de B. Y cada refresco del tipo R_2 contiene 3 gr de A y 6 gr de B. Se dispone de 120 gr de A y 180 gr de B. ¿Cuántos refrescos de cada clase se han de elaborar para obtener un beneficio máximo sabiendo que con los refrescos R_1 se ganan 3 pesetas y con los de R_2 se ganan 4 pesetas?

(Univ. de León, 1991)

Sean x e y, respectivamente, el número de refrescos R_1 y R_2 que se han de elaborar para obtener el beneficio máximo.

La función objetivo es $F(x, y) = 3x + 4y$

La información la podemos resumir en el siguiente cuadro:

	R_1 x	R_2 y	Limitación de los recursos
A	3 gr	3 gr	120
B	3 gr	6 gr	180

Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+3y \leq 120 \\ 3x+6y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right| \text{ restricciones}$$

Hallemos los vértices:

$\left.\begin{array}{l} 3x+3y=120 \\ 3x+6y=180 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} x=20 \\ 3y=60\ ;\ y=20 \end{array}$; (20, 20) satisface las otras dos restricciones: $20 \geq 0$, luego es un vértice de K, conjunto de oportunidades.

$\left.\begin{array}{l} 3x+3y=120 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0\ ;\ y=40$; (0, 40) no satisface a la segunda restricción: $3 \cdot 0 + 6 \cdot 40 = 240 > 180$, luego no es vertice de K.

$\left.\begin{array}{l} 3x+3y=120 \\ y=0 \end{array}\right| \Rightarrow x=40\ ;\ y=0$; (40, 0) satisface a todas las restricciones, luego es un vértice de K

$\left.\begin{array}{l} 3x+6y=180 \\ x=0 \end{array}\right| \Rightarrow x=0\ ;\ y=30$; (0, 30) satisface a todas las restricciones, es vértice de K

$\left.\begin{array}{l} 3x+6y=180 \\ x=0 \end{array}\right| \Rightarrow x=60\ ;\ y=0$; (60, 0) no satiface a la primera restricción $3 \cdot 60 + 30 = 180 > 120$, no es vértice.

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right| \Rightarrow x=0,\ y=0$; (0, 0) es vértice.

Veamos cuál de estos vértices hace máxima la función objetivo:

$F(20, 20) = 3 \cdot 20 + 4 \cdot 20 = 140$; $F(40,0) = 3 \cdot 40 + 4 \cdot 0 = 120$; $F(0,30) = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 30 = 120$; $F(0,0) = 0$

La solución $x = 20$ e $y = 20$ es la pedida.

Se obtendrá el máximo beneficio fabricando 20 refrescos del tipo R_1 y 20 del tipo R_2.

METODO GRAFICO.

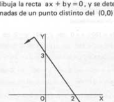
Referido el plano a un sistema de coordenadas, la inecuación $ax + by \leq c$ (ó $ax + by \geq c$) divide al plano en dos semiplanos. Se representa en primer lugar la recta de ecuación $ax + by = c$, y para ver qué semiplano corresponde a la inecuación, se comprueba si el punto (0,0) satisface o no a la inecuación, lo que nos dirá si el semiplano que define la inecuación es el que contiene o no al punto (0,0).

Si la inecuación es $ax + by \leq 0$ (ó $ax + by \geq 0$), se dibuja la recta $ax + by = 0$, y se determina el semiplano que define la inecuación probando si las coordenadas de un punto distinto del (0,0) satisfacen o no la inecuación.

Sea la inecuación $3x + 2y \leq 6$:

$3x + 2y = 6$: $x = 0 \Rightarrow y = 3$; $y = 0 \Rightarrow x = 2$

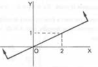
$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 < 6 \Rightarrow$ el punto (0,0) satisface la inecuación, está en el semiplano definido por la misma.



Sea la inecuación $x \leq 2y$.

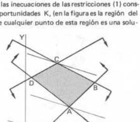
$x - 2y = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $x = 2 \Rightarrow y = 1$

$2 > 2 \cdot 0 \Rightarrow$ el punto (2,0) no satisface la inecuación $x \leq 2y$, no está en el semiplano definido por la misma.



La intersección de todos los semiplanos definidos por las inecuaciones de las restricciones (1) constituye la región del plano correspondiente al conjunto de oportunidades K, (en la figura es la región del plano limitada por el polígono ABCD). Las coordenadas de cualquier punto de esta región es una solución factible.

Se representa la recta $mx + ny = 0$ (o la recta $mx + ny = p$, siendo p un múltiplo de m y n) y se mueve paralelamente a sí misma hasta que toque en un vértice a la región del plano del conjunto de oportunidades y deje por encima o por debajo de la recta a dicha región.



Si nos piden el máximo de la función objetivo $F(x, y) = mx + ny$, en la que $m \cdot n > 0$, la solución pedida son las coordenadas del vértice por donde pasa la paralela a la recta $mx + ny = 0$ y deja por debajo a la región del conjunto de oportunidades K, en la figura, las coordenadas del vértice C. Si $m \cdot n < 0$, la región del conjunto de oportunidades debe quedar por encima de la recta.

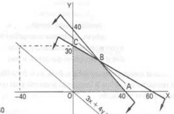
Si nos piden el mínimo de la función objetivo $F(x, y) = mx + ny$, siendo $m \cdot n > 0$, la solución pedida son las coordenadas del vértice por donde pasa la paralela a la recta $mx + ny = 0$ y deja por encima a la región del conjunto de oportunidades K. En la figura, las coordenadas del vértice A. Si $m \cdot n < 0$, la región del conjunto de oportunidades debe quedar por debajo de la recta.

Si la paralela a la recta $mx + ny = 0$ pasa por dos vértices, dejando por encima o debajo de ella a la región del conjunto de oportunidades, las soluciones pedidas son las coordenadas de los puntos del segmento determinado por ambos vértices.

Sea hallar el máximo de $F(x, y) = 3x + 4y$ con las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 3y \leq 120 \\ 3x + 6y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

(Estas expresiones corresponden al problema anterior de los refrescos).



$3x + 3y = 120$: $x = 0 \Rightarrow y = 40$; $y = 0 \Rightarrow x = 40$

$3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 < 120 \Rightarrow$ el punto (0, 0) pertenece al semiplano definido por la inecuación $3x + 3y \leq 120$.

$3x + 6y = 180$: $x = 0 \Rightarrow y = 30$; $y = 0 \Rightarrow x = 60$

$3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0 < 180 \Rightarrow$ el punto (0, 0), pertenece al semiplano definido por la inecuación $3x + 6y \leq 180$

Los semiplanos definidos por $x \geq 0$ e $y \geq 0$ son inmediatos.

El conjunto de soluciones factibles es la región del plano determinada por el polínomio OABC (región sombreada ı la figura).

Dibujemos la recta $3x + 4y = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $x = -40 \Rightarrow y = 30$

La recta paralela a ésta que toca al polígono OABC en un punto y lo deja por debajo de ellas (ya que se trata de ıallar el máximo de la función y $m \cdot n \geq 0$) es la que pasa por el vértice B. Las coordenadas de este vértice son los valores pedidos:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 3y = 120 \\ 3x + 6y = 180 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 20;\ y = 20$$

PROBLEMAS

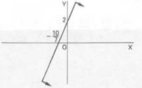
4.1 Maximizar $z = 3x + 2y$

sujeta a:

$$\left.\begin{array}{r} -7x + 5y \leq 10 \\ -7x + 3y \geq -15 \\ 2x - 3y \geq -10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right|$$

(Univ. de Extremadura)

Determinemos la región del plano correspondiente al conjunto de oportunidades:

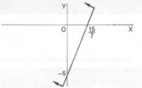


$-7x + 5y = 10$: $x = 0 \Rightarrow y = 2$;

$$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{10}{7} \approx -1{,}4$$

$-7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 < 10 \Rightarrow$ el punto (0,0) pertenece al semiplano definido por la inecuación

$$-7x + 5y \leq 10.$$

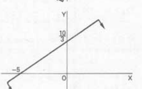


$-7x + 3y = -15$: $x = 0 \Rightarrow y = -5$;

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{15}{7} \approx 2{,}1$$

$-7 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 > -15 \Rightarrow$ el punto (0,0) pertenece al semiplano definido por la inecuación

$$-7x + 3y \geq -15.$$



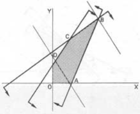
$2x - 3y = -10$: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{10}{3} \approx 3{,}3$;

$$y = 0 \Rightarrow x = -5$$

$2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 > -10 \Rightarrow$ el punto (0,0) pertenece al semiplano definido por la inecuación

$$2x - 3y \geq -10.$$

Considerando también los semiplanos $x \geq 0$ e $y \geq 0$, el conjunto de soluciones posibles son las coordenadas de los puntos de la región del plano limitada por el polígono OABCD.



Representemos la recta $3x + 2y = 6$:

$$x = 0 \Rightarrow y = 3;\quad y = 0 \Rightarrow x = 2$$

Trasladando esta recta paralelamente a sí misma, obtendremos una posición en que es tangente al polígono OABCD en el punto B. Las coordenadas de B hacen máxima la función objetivo.

El punto B es vértice de la segunda y tercera restricción

$$\begin{array}{r} -7x + 3y = -15 \\ 2x - 3y = -10 \\ \hline -5x \quad = -25 \Rightarrow x = 5 \end{array} \qquad 3y = -15 + 7x = -15 + 7 \cdot 5 = 20 \Rightarrow y = \frac{20}{3}$$

La función objetivo alcanza su máximo en el punto $B(5, \frac{20}{3})$:

$$\text{máximo de } z = 3 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{20}{3} = 15 + \frac{40}{3} = \frac{45 + 40}{3} = \boxed{\frac{95}{3}}$$

4.2 Minimizar y maximizar la función $z = 5x + 4y$

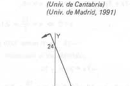
en el recinto

$$\left.\begin{array}{r} 12x + 5y \leq 120 \\ 6x + 8y \leq 180 \\ 5x + 10y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right|$$

(Univ. de Cantabria)
(Univ. de Madrid, 1991)

Determinemos la región del plano correspondiente al conjunto de oportunidades:

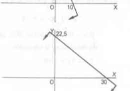
$$12x + 5y = 120 \left| \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = \frac{120}{5} = 24 \\ y = 0 \Rightarrow x = \frac{120}{12} = 10 \end{array} \right.$$



$12 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 < 120 \Rightarrow$ el punto (0,0) pertenece al semiplano definido por la inecuación

$$12x + 5y \leq 120.$$

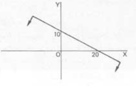
$$6x + 8y = 180 \left| \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = \frac{180}{8} = 22'5 \\ y = 0 \Rightarrow x = \frac{180}{6} = 30 \end{array} \right.$$



$6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0 < 180 \Rightarrow$ el punto (0,0) pertenece al semiplano definido por la inecuación

$$6x + 8y \leq 180$$

$5x + 10y = 100 \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 10 \\ y = 0 \Rightarrow x = 20 \end{cases}$



$5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0 < 100 \Rightarrow$ el punto (0,0) pertenece al semiplano definido por la inecuación

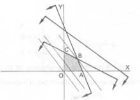
$$5x + 10\ y \leqslant 100$$

Considerando los semiplanos $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, el conjunto de soluciones posibles son las coordenadas de los puntos de la región limitada por el polígono OABC.

Representemos la recta $5x + 4y = 20$:

$x = 0 \Rightarrow y = 5$; $y = 0 \Rightarrow x = 4$

Trasladando esta recta paralelamente a sí misma, vemos que es tangente al polígono OABC en los puntos B y O.



El punto B es vértice de la primera y tercera restricción:

$$\left.\begin{array}{l} 12x + 5y = 120 \\ 5x + 10y = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 120 & 5 \\ 100 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{1200 - 500}{120 - 25} = \frac{700}{95} = \frac{140}{19}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 120 \\ 5 & 100 \end{vmatrix}}{95} = \frac{1200 - 600}{95} = \frac{600}{95} = \frac{120}{19}$$

La función objetivo alcanza su máximo valor en el punto $\left(\frac{140}{19}, \frac{120}{19}\right)$:

$$z = 5 \cdot \frac{140}{19} + 4\ \frac{120}{19} = \frac{700 + 480}{19} = \boxed{\frac{1180}{19}}$$

La función objetivo alcanza su mínimo valor en el punto O(0,0):

$$z = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = \boxed{0}$$

4.3 **Representar gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen las siguientes inecuaciones lineales:**

$$\begin{aligned} x + 2y &\leqslant 10 \\ x + \ y &\geqslant 2 \\ x &\leqslant 8 \\ x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Hallar el máximo y el mínimo de $F(x, y) = x - 3y$, sujeto a las restricciones representadas por las inecuaciones del apartado anterior.

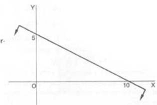
(Univ. de Zaragoza, 1991)

Determinemos la región del plano correspondiente al conjunto de oportunidades:

$$x + 2y = 10 \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 5 \\ y = 0 \Rightarrow x = 10 \end{cases}$$

$0 + 2 \cdot 0 = 0 < 10 \Rightarrow$ el punto $(0,0)$ pertenece al semiplano defindo por la inecuación

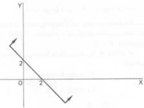
$$x + 2y \leq 10$$



$$x + y = 2 \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ y = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$0 + 2 \cdot 0 = 0 < 2 \Rightarrow$ el punto $(0,0)$ no pertenece al semiplano definido por la inecuación

$$x + y \geq 2$$



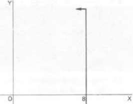
La determinación del semiplano definido por la inecuación $x \leq 8$ no ofrece dificultad, ni como los semiplanos definidos por las inecuaciones

$$x \geq 0, \; y \geq 0$$

El conjunto de soluciones posibles son las coordenadas de los puntos de la región del plano sombreada en la figura.

Representemos la recta $x - 3y = 0$:

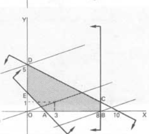
$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \; ; \; x = 3 \Rightarrow y = 1.$$



Trasladando esta recta paralelamente a sí misma, obtenemos dos posiciones en las que sólo tiene un punto en común con el conjunto de oportunidades, las rectas que pasan por los puntos B y D. Como $m \cdot n = 1 \cdot (-3) < 0$, las coordenadas de B hacen máximo el valor de F (la región de soluciones posibles queda por encima de la recta), y las coordenadas de D hacen mínimo el valor de F (la región de soluciones posibles queda por debajo de la recta).

$B(8,0) \Rightarrow F(8,0) = 8 - 3 \cdot 0 = 8$, máximo de F.

$D(0,5) \Rightarrow F(0,5) = 0 - 3 \cdot 5 = -15$, mínimo de F.



4.4 Calcular los valores de x e y que hacen máxima y los que hacen mínima la función

$$z = 3x + 2y$$

en la región del plano determinada por las restricciones:

$$\left.\begin{aligned} 6x + 7y - 13 &\geq 0 \\ x + 2y &\geq 0 \\ y &\geq 6x - 26 \end{aligned}\right|$$

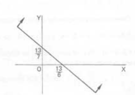
(Univ. de Madrid, 1991)

Determinemos la región del plano correspondiente al conjunto de oportunidades:

$6x + 7y = 13$: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{13}{7} \approx 1{,}8$;

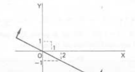
$y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{13}{6} \approx 2{,}2$

$6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 13 = -13 < 0 \Rightarrow$ el punto (0, 0) no pertenece al semiplano definido por la inecuación $6x + 7y - 13 \geq 0$.



$x + 2y = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $x = 2 \Rightarrow y = -1$

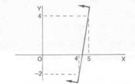
$1 + 2 \cdot 1 = 3 > 0 \Rightarrow$ el punto (1, 1) pertenece al semiplano definido por la inecuación $x + 2y \geq 0$.



$y = 6x - 26$: $x = 5 \Rightarrow y = 4$; $x = 4 \Rightarrow y = -2$

$0 > 6 \cdot 0 - 26 \Rightarrow$ el punto (0,0) pertenece al semiplano definido por la inecuación $y \geq 2x - 26$.

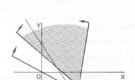
El conjunto de soluciones posibles son las coordenadas de los puntos de la región del plano sombreado en la figura.



Representemos la recta $3x + 2y = 6$:

$x = 0 \Rightarrow y = 3$; $y = 0 \Rightarrow x = 2$

Trasladando esta recta paralelamente a sí misma, en ninguna posición es tangente en algún vértice a la figura sombreada, ni coincide con alguna arista, lo que nos dice que la función objetivo no alcanza en ningún punto su valor máximo o mínimo.



4.5 **Resolver gráficamente el siguiente problema de programación lineal:**

$$\begin{array}{ll} \max & 0{,}75\,x + y \\ \text{s.a} & \left.\begin{array}{l} x + 3y \leq 15 \\ 5x + y \leq 20 \\ 3x + 4y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right| \end{array}$$

¿Es única la solución?

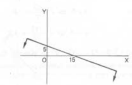
(Univ. de Alicante)

Determinemos la región del plano correspondiente al conjunto de oportunidades:

$x + 3y = 15: \ x = 0 \Rightarrow y = 5; \ y = 0 \Rightarrow x = 15$

$0 + 3 \cdot 0 = 0 < 15$, el punto (0,0) pertenece al semiplano definido por la inecuación

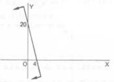
$$x + 3y \leq 15.$$



$5x + y = 20: \ x = 0 \Rightarrow y = 20; \ y = 0 \Rightarrow x = 4$

$5 \cdot 0 + 0 = 0 = 0 < 20 \Rightarrow$ el punto (0,0) pertenece al semiplano definido por la inecuación

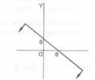
$$5x + y \leq 20.$$



$3x + 4y = 24: \ x = 0 \Rightarrow y = 6; \ y = 0 \Rightarrow x = 8$

$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 < 24 \Rightarrow$ el punto (0,0) pertenece al semiplano definido por la inecuación

$$3x + 4y \leq 24.$$

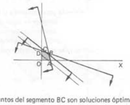


Considerando los semiplanos $x \geq 0$ e $y \geq 0$, el conjunto de soluciones posibles son las coordenadas de los puntos de la región del plano limitada por el polígono OABCD.

Representemos la recta $0{,}75\,x + y = 3$:

$x = 0 \Rightarrow y = 3; \ y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{0{,}75} = 4$

Esta recta, deducida de la función objetivo, es paralela a la recta $3x + 4y = 24$, deducida de la ecuación de la tercera restricción, puesto que sus coeficientes angulares son iguales: $-0{,}75 = -\dfrac{3}{4}$. Esto nos dice que los vértices B y C, y las coordenadas de los puntos del segmento BC son soluciones óptimas.



Cálculo de las coordenadas de B:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + y = 20 \\ 3x + 4y = 24 \end{array}\right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 24 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{80-24}{20-3} = \frac{56}{17}\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 3 & 24 \end{vmatrix}}{17} = \frac{120-60}{17} = \frac{60}{17}$$

Cálculo de las coordenadas de C:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y = 15 \\ 3x + 4y = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 24 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{60-72}{4-9} = \frac{12}{5}\,; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 3 & 24 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{24-45}{-5} = \frac{21}{5}$$

El máximo de la función objetivo es:

$$0{,}75 \cdot \frac{56}{17} + \frac{60}{17} = \frac{42+60}{17} = \boxed{\frac{104}{17}}$$

Este máximo lo alcanza en cualquier punto del segmento BC, siendo $B\left(\frac{56}{17}, \frac{60}{17}\right)$ y $C\left(\frac{12}{5}, \frac{21}{5}\right)$.

Las coordenadas genéricas de los puntos del segmento BC son:

$$(x, y) = \left(\frac{56}{17}, \frac{60}{17}\right) + (1-\lambda)\left(\frac{12}{5} - \frac{56}{17}, \frac{21}{5} - \frac{60}{17}\right) \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{56}{17} + (1-\lambda)\left(\dfrac{12}{5} - \dfrac{56}{17}\right) \\[2ex] y = \dfrac{60}{17} + (1-\lambda)\left(\dfrac{21}{5} - \dfrac{60}{17}\right) \end{array}\right. \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

4.6 Dada la región del plano definida por las inecuaciones

$$\left|\begin{array}{l} x + y - 1 \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \end{array}\right.$$

¿Para qué valores (x, y) de la región es máxima la función $z = 5x + 2y$? ¿Para cuáles es mínima?

(Univ. de Madrid)

Hallemos la región del plano definido por las inecuaciones.

$x + y - 1 = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = 1$; $y = 0 \Rightarrow x = 1$

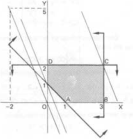
El punto $(0,0)$ no satisface la inecuación

$$x + y - 1 \geqslant 0$$

luego el punto $(0,0)$ no pertenece al semiplano definido por dicha inecuación.

La inecuación $0 \leqslant x \leqslant 3$ representa la franja de plano que está entre las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

La inecuación $0 \leqslant y \leqslant 2$ representa la región del plano comprendida entre las rectas $y = 0$ e $y = 2$.



Las tres inecuaciones definen la región del plano limitada por el polígono ABCDE, de vértices: A(1,0) B(3,0), C(3,2), D(0,2), E(0,1).

Representemos la recta $5x + 2y = 0$: $\quad x = 0 \Rightarrow y = 0$; $x = -2 \Rightarrow y = 5$

Trasladando esta recta patalelamente a sí misma, encuentra en un solo punto al polígono ABCDE en las vértices C(3, 2) y E(0, 1). En el punto C alcanza su valor máximo la función z:

$$\text{máximo de } z = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = \boxed{19}$$

y en el punto E tiene su valor mínimo:

$$\text{mínimo de } z = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = \boxed{2}$$

4.7 Se desea obtener tres elementos químicos a partir de las sustancias A y B. Un kilo de contiene 8 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero; un kilo de B tiene 4 gr mos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero. Se desea obtener al menos 16 gram del primer elemento y las cantidades del segundo y del tercero han de ser como mucho 5 y 20 gram respectivamente y la cantidad de A es como mucho el doble que la de B.

Calcular los kilos de A y los de B que han de tomarse para que el coste sea mínimo si un kilo A vale 200 pts. y uno de B 1.000 pts. ¿Puede eliminarse alguna restricción?

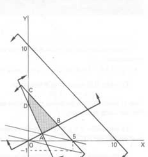
(Univ. de Zaragoza)

Sean, respectivamente, x e y los kilos que se ha de tomar de A y B. La información la podemos sumir en la siguiente tabla:

	A x kilos	B y kilos	g. totales
g. elemento 1º	8	4	$\geqslant 16$
g. elemento 2º	1	1	$\leqslant 5$
g. elemento 3º	2	2	< 20

Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 4y \geqslant 16 \\ x + y \leqslant 5 \\ 2x + 2y \leqslant 20 \\ x \leqslant 2y \\ x > 0,\ \ y > 0 \end{array}\right|$$



Con estas condiciones se ha de obtener el mínimo del coste:

$$z = 200x + 1000y$$

Hallemos el conjunto de soluciones factibles:

$8x + 4y = 16$: $x = 0 \Rightarrow y = 4$; $y = 0 \Rightarrow x = 2$

$8 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 < 16 \Rightarrow$ el punto (0, 0) no pertenece al semiplano definido por la inecuación

$$8x + 4y \geqslant 16$$

$x+y=5: \ x=0 \Rightarrow y=5; \ y=0 \Rightarrow x=5$

$0+0<5 \Rightarrow$ el punto $(0,0)$ pertenece al semiplano definido por la inecuación $x+y \leq 5$.

$2x+2y=20: \ x=0 \Rightarrow y=10; \ y=0 \Rightarrow x=10$

$2 \cdot 0+2 \cdot 0=0<20 \Rightarrow$ el punto $(0,0)$ pertenece al semiplano definido por $2x+2y \leq 20$

$x=2y: \ x=0 \Rightarrow y=0; \ y=1 \Rightarrow x=2$

$2>2 \cdot 0 \Rightarrow$ el punto $(2,0)$ no pertenece al semiplano definido por $x \geq 2y$.

El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos determinados por el polínomio ABCD.

Dibujemos la recta $200x+1000y=0: \ x=0 \Rightarrow y=0; \ x=5 \Rightarrow y=-1$

La recta paralela a esta última que pasa por el punto A tiene en común con el polínomio ABCD sólo el punto A, quedando el polígono por encima de la recta. Las coordenadas de A son los valores pedidos:

$$\left.\begin{aligned} 8x+4y &= 16 \\ x &= 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow 16y+4y=16 \Rightarrow y=\frac{16}{20}=0,8; \ x=1,6$$

$\boxed{\text{deben emplearse 1,6 kgs. de A y 0,8 kgs. de B.}}$

De la figura se deduce que la restricción $2x+2y \leq 20$ no interviene en la solución del problema, puede eliminarse.

4.8 Una compañía aérea tiene dos aviones A y B para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer 60 o más vuelos, pero no más de 200. En cada vuelo A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. En cada viaje del avión A la empresa gana 300 000 pts. y 200 000 por cada viaje del B. ¿Cuántos viajes debe hacer cada avión para obtener el máximo de ganancias? ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo de combustible sea mínimo?

(Univ. de Murcia, 1991)

Sea x el número de viajes de A e y el de B.

Según el enunciado:

$$\left.\begin{aligned} x &> y \\ x &\leq 120 \\ x+y &> 60 \\ x+y &\leq 200 \end{aligned}\right|$$

Con estas condiciones tenemos que hallar el mínimo del consumo y el máximo de beneficio.

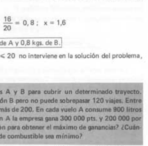
Consumo: $C=900x+700y$

Beneficio: $G=300000x+200000y$

Hallemos el conjunto de soluciones factibles.

La recta $x=y$ es la bisectriz del primer cuadrante.

$1>0 \Rightarrow$ el punto $(1,0)$ pertenece al semiplano definido por la inecuación $x>y$.



El semiplano definido por $x \leq 120$ no ofrece dificultad

$x + y = 60: \; x = 0 \Rightarrow y = 60 \; ; \; y = 0 \Rightarrow x = 60$

$0 + 0 < 60 \Rightarrow$ el punto $(0, 0)$ no pertenece al semiplano definido por la inecuación $x + y > 60$

$x + y = 200: \; x = 0 \Rightarrow y = 200 \; ; \; y = 0 \Rightarrow x = 200$

$0 + 0 = 0 < 200 \Rightarrow$ el punto $(0, 0)$ pertenece al semiplano definido por la inecuación $x + y \leq 200$

El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos determinados por el polígono ABCDE.

Dibujemos la recta $900x + 700y = 0: \; x = 0 \Rightarrow y = 0 \; ; \; x = -70 \Rightarrow y = 90$

La recta paralela a la anterior y que pasa por el vértice E tiene en común con el polígono de soluciones factibles sólo el punto E, dejando por encima de la recta el polígono. Las coordenadas de E son los valores que hacen mínimo el consumo.

$$\left.\begin{array}{r} x = y \\ x + y = 60 \end{array}\right| \Rightarrow x = y = 30 \Rightarrow$$

$\boxed{\text{el consumo de combustible será mínimo si cada avión hace 30 viajes.}}$

Dibujemos la recta $300000x + 200000\,y = 0: \; x = 0 \Rightarrow y = 0 \; ; \; x = -100 \Rightarrow y = 150$

La recta paralela a la anterior y que pasa por el vértice C tiene en común con el polígono de soluciones factibles sólo el punto C, dejando por debajo de la recta el polígono. Las coordenadas de E son los valores que hacen máximo el beneficio.

$$\left.\begin{array}{r} x = 120 \\ x + y = 200 \end{array}\right| \Rightarrow x = 120 \, , \; y = 80 \Rightarrow$$

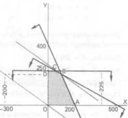
$\boxed{\text{el beneficio máximo se obtiene si el avión A hace 120 viajes y el B hace 80.}}$

4.9 Se desea fabricar dos tipos de bombones que llamaremos A y B. Las cajas del tipo A contienen 1 kg de chocolate y 2 kg de cacao; las de tipo B contienen 2 kg de chocolate, 1 kg de cacao y 1 kg de almendras. Disponemos de 500 kg de chocolate, 400 de cacao y 225 de almendras. Por cada caja del tipo A se ganan 200 ptas. y por cada caja de tipo B 300 ptas. ¿Cuántas cajas de cada tipo hay que fabricar para que la ganancia sea máxima?

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

Podemos resumir la información en el siguiente cuadro:

	A x cajas	B y cajas	Cantidad máxima
chocolate	1	2	500
cacao	2	1	400
almendras	0	1	225



Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \\ x \geq 0; \; y \geq 0 \end{array}\right|$$

Cumpliendo estas condiciones hay que hallar el valor máximo de

$$z = 200x + 300y$$

Hallemos el conjunto de soluciones factibles:

$x + 2y = 500: \ x = 0 \Rightarrow y = 250; \ y = 0 \Rightarrow x = 500$

$0 + 2 \cdot 0 = 0 < 500 \Rightarrow$ el punto (0, 0) pertenece al semiplano definido por la inecuación $x + 2y \leq 500$.

$2x + y = 400: \ x = 0 \Rightarrow y = 400; \ y = 0 \Rightarrow x = 200$

$2 \cdot 0 + 0 = 0 < 400 \Rightarrow$ el punto (0, 0) pertenece al semiplano definido por la inecuación $2x + y \leq 400$.

La obtención del semiplano definido por la inecuación $y \leq 225$ no tiene ninguna dificultad.
El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos determinados por polígono OABCD.

Dibujemos la recta $200x + 300y = 0: \ x = 0 \Rightarrow y = 0; \ x = -300 \Rightarrow y = 200$

La recta paralela a esta última que pasa por el punto B tiene en común con el polígono de soluciones factibles sólo el punto B. Las coordenadas de B son los valores pedidos.

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 500 \\ 2x + y = 400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + 4y = 1000 \\ 2x + y = 400 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y = 600; \ y = 200 \quad x = 100 \Rightarrow$$

Hay que fabricar 100 cajas del tipo A y 200 del tipo B.

4.10 Pablo dispone de 12.000 pts. para gastar en libros y discos. En la tienda donde acude, el precio de los libros es de 400 pts. y el de los discos ees de 1.200 pts. Suponiendo que desea comprar como mucho doble número de libros que de discos, se pide:

a) Formular el problema y representarlo gráficamente.
b) Contestar razonadamente si puede comprar 12 libros y 6 discos. En caso afirmativo, indicar si gasta todo su presupuesto.
c) ¿Puede adquirir 15 libros y 5 discos?, ¿cuánto dinero le sobra? Razonar la respuesta.

(Univ. de Oviedo, 1991)

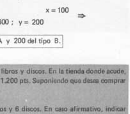
a) Sea x el número de libros que compra e y el número de discos. Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} 400x + 1200y \leq 12000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0; \ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Hallemos el conjunto de soluciones factibles:

$$400x + 1200y = 12000 \left\{\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 10 \\ y = 0 \Rightarrow x = 30 \end{array}\right.$$

$400 \cdot 0 + 1200 \cdot 0 = 0 \leq 1200 \Rightarrow$ el punto (0, 0) pertenece al semiplano definido por la inecuación $400x + 1200y \leq 12000$.



$x = 2y: \ x = 0 \Rightarrow y = 0; \ y = 10 \Rightarrow x = 20$

$0 \leq 2 \cdot 20 \Rightarrow$ el punto (0, 10) está en el semiplano definido por la inecuación $x \leq 2y$.

$$\left.\begin{array}{r} 400\,x + 1200\,y = 12000 \\ x = 2\,y \end{array}\right| \Rightarrow \; 800\,y + 1200\,y = 12000\,; \;\; y = 6\,, \;\; x = 12$$

El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos determinados por el triángulo OAB, siendo A(12, 6) y B(0, 10).

b) El punto (12, 6) pertenece al conjunto de soluciones factibles, y como está sobre la recta $400\,x + 1200\,y = 12000$, gasta todo un presupuesto.

c) El punto (15, 5) no pertenece al conjunto de soluciones factibles.

4.11 Un laboratorio fabrica los complejos vitamínicos **REVIT y VITAL** que se venden a 192 pts. y 221 pts. la caja, respectivamente. La tabla adjunta indica los contenidos en vitaminas A y B por caja de cada producto. El costo de 1 gramo de vitamina A es de 5 pts. y el costo de 1 gramo de vitamina B es de 12 pts. Justificar que el beneficio obtenido al vender x cajas de REVIT e y cajas de VITAL es 100x + 150y. Se dispone de 38 gramos de vitamina A y 42 gramos de vitamina B. ¿Cuántas cajas de REVIT y cuántas cajas de VITAL deben fabricarse para que el beneficio 100x − 150y sea máximo?

	A	B
REVIT	4 gramos	6 gramos
VITAL	7 gramos	3 gramos

(Univ. de Valencia, 1991)

Importe de la venta de x cajas de Revit e y cajas de Vital: $192\,x + 221\,y$

En x cajas de Revit e y cajas de Vital hay: $\left\{\begin{array}{l} 4x + 7\,y \text{ gramos de vitamina A} \\ 6x + 3\,y \text{ gramos de vitamina B} \end{array}\right.$

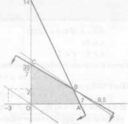
Coste de x cajas de Revit e y cajas de Vital: $(4\,x + 7\,y)\cdot 5 + (6\,x + 3\,y)\cdot 12 = 92\,x + 71\,y$

El beneficio obtenido al vender x cajas de Revit e y cajas de Vital es:

$$B = (192\,x + 221\,y) - (92\,x + 71\,y) = 100\,x + 150\,y$$

Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 7y \leq 38 \\ 6x + 3y \leq 42 \\ x \geq 0;\, y \geq 0 \end{array}\right|$$



Con estas condiciones se ha de obtener el máximo beneficio.

Hallemos el conjunto de soluciones factibles.

$$4\,x + 7\,y = 38: \;\; x = 0 \Rightarrow y = \frac{38}{7} \approx 5{,}4$$

$$y = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{38}{4} = 9{,}5$$

$4\cdot 0 + 7\cdot 0 = 0 \leq 38 \;\Rightarrow$ el punto (0, 0) pertenece al semiplano definido por la inecuación $4\,x + 7\,y \leq 38.$

$$6\,x + 3\,y = 42: \;\; x = 0 \;\Rightarrow\; y = 14\,; \;\; y = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{42}{6} = 7$$

$6\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0 \leq 42 \;\Rightarrow$ el punto (0, 0) pertenece al semiplano definido por $6\,x + 3\,y \leq 4$

La región del plano limitada por el polígono OABC es el de las soluciones factibles.

Dibujemos la recta $100x + 150y = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $x = -3 \Rightarrow y = 2$

Trasladando esta recta paralelamente a sí misma, obtendremos una posición en la que es tangente al polígono OABC en el punto B. Las coordenadas de B hacen máxima la función de optimización:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & 4x + 7y = 38 \\ (2) & 6x + 3y = 42\end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{ll}(1) & 4x + 7y = 38 \\ (2') = 2(2) - 3(1) & -15y = -30\end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{c} x = 6 \\ y = 2 \end{array}$$

$\boxed{\text{Se deben fabricar 6 cajas de Revit y 2 cajas de Vital}}$

4.12 Disponemos de 21 000 000 pts. para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las del tipo B que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 13 000 000 pts. en las del tipo A y como mínimo 600 000 pts. en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

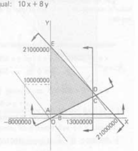
(Univ. del País Vasco, 1991)

Sea x la inversión en acciones del tipo A e y la inversión en acciones del tipo B.

Función a maximizar: $0{,}1 \cdot x + 0{,}08 \cdot y$, o lo que es igual: $10x + 8y$

Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \leqslant 21000000 \\ 0 \leqslant x \leqslant 13000000 \\ y \geqslant 600000 \\ x \leqslant 2y \end{array}\right|$$



Representemos la recta $x + y = 21000000$

$x = 0 \Rightarrow y = 21000000$; $y = 0 \Rightarrow x = 21000000$

$0 + 0 < 21000000 \Rightarrow$ el punto $(0, 0)$ pertenece al semiplano definido por la inecuación $x + y \leqslant 21000000$

El dibujo de los semiplanos determinados por las inecuaciones $0 \leqslant x$; $x \leqslant 13000000$, $y \geqslant 600000$ no ofrece dificultad.

$$x = 2y \left| \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 13000000 \Rightarrow y = 6500000 \end{array}\right.$$

$13.000000 > 2 \cdot 0 \Rightarrow$ el punto $(13000000, 0)$ no satisface la inecuación $x \leqslant 2y$, no está en el semiplano definido por la inecuación.

El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos determinados por el polígono ABCDE.

Dibujemos la recta $10x + 8y = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $x = -8000000 \Rightarrow y = 10000000$

La recta paralela a la anterior y que pasa por el vertice D tiene en común con el polígono de soluciones factibles sólo el punto D. Las coordenadas de este punto son los valores pedidos:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 21000000 \\ x = 13000000 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x = 13000000\ ;\ y = 8000000}$$

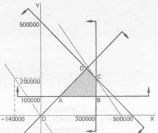
4.13 Una persona tiene 500 000 pts. para invertir en dos tipos de acciones, A y B. El tipo A tiene bastante riesgo con un interés anual del 10% y el tipo B es bastante seguro con un interés anual del 7%. Decide invertir como máximo 300 000 pts. en A y como mínimo 100 000 pts. en B, e invertir en A por lo menos tanto como en B. ¿Cómo debería invertir sus 500 000 pts. para maximizar sus intereses anuales?

(Univ. de Valencia, 1991)
(Univ. de Salamanca, 1991)

Sea x la inversión en acciones del tipo A, e y la inversión en acciones del tipo B.

Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{r} x+y \leq 500000 \\ 0 \leq x \leq 300000 \\ y \geq 100000 \\ x \geq y \end{array}\right|$$



El beneficio obtenido será:

$$z = 0{,}1 \cdot x + 0{,}07 \cdot y$$

Con las condiciones anteriores tenemos que hallar el máximo de z, o lo que es igual el máximo de

$$10x + 7y$$

Hallemos el conjunto de soluciones factibles:

$x + y = 500000: \ x = 0 \Rightarrow y = 500000;$

$y = 0 \Rightarrow x = 500000$

$0 + 0 = 0 < 500000 \Rightarrow$ el punto $(0, 0)$ pertenece al semiplano definido por la inecuación $x + y \leq 500000$.

Los semiplanos definidos por las enecuaciones $x \leq 300000$, e $y \geq 100000$ no ofrecen dificultad

La recta $x = y$ es la bisectriz del primer cuadrante.

$300000 > 0 \Rightarrow$ el punto $(300000{,}0)$ pertenece al semiplano definido por la inecuación $x \geq y$.

El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos determinados por el polígono ABCD.

Dibujemos la recta $10x + 7y = 0: \ x = 0 \Rightarrow y = 0; \ x = -140000 \Rightarrow y = 200000$

La recta paralela a esta última que pasa por el punto C tiene en común con el polígono de soluciones sólo el punto C, quedando el polígono por debajo de la recta. Las coordenadas de C son los valores pedidos.

$$\left.\begin{array}{r} x = 300000 \\ x + y = 500000 \end{array}\right| \Rightarrow x = 300000, \ y = 200000$$

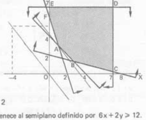
Debe invertir 300000 pesetas en acciones del tipo A y 200000 en las del tipo B

4.14 Un fabricante de aviones produce en dos fábricas tres tipos de aparatos: el A, el B y el C. Se ha comprometido a entregar semanalmente a un emirato árabe 12 aviones del tipo A, 8 del tipo B y 24 del tipo C. Al fabricante le cuesta 2 millones de pesetas diarias el funcionamiento de la primera fábrica y 1,6 millones el de la segunda. La primera fábrica produce, en un día, 6 aviones tipo A, 2 tipo B y 4 tipo C mientras que la segunda produce, respectivamente, 2, 2 y 12. ¿Cuántos días por semana debe trabajar cada fábrica para, cumpliendo el contrato con el emir, conseguir reducir al máximo los costos de funcionamiento de las fábricas?

(Univ. de Alicante, 1991)

Sean x e y, respectivamente, los días por semana que deben trabajar la primera y la segunda fábrica. Podemos resumir la información en el siguiente cuadro:

	1ª fábrica x días	2ª fábrica y días	Número mínimo de aviones
A	6	2	12
B	2	2	8
C	4	12	24



Según el enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} 6x + 2y \geq 12 \\ 2x + 2y \geq 8 \\ 4x + 12y \geq 24 \\ 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 7 \end{array}\right|$$

Cumpliendo estas condiciones hay que hallar el valor mínimo de $z = 2x + 1{,}6y$

Hallemos el conjunto de soluciones factibles:

$6x + 2y = 12$: $x = 0 \Rightarrow y = 6$; $y = 0 \Rightarrow x = 2$

$6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 < 12 \Rightarrow$ el punto $(0, 0)$ no pertenece al semiplano definido por $6x + 2y \geq 12$.

$2x + 2y = 8$: $x = 0 \Rightarrow y = 4$; $y = 0 \Rightarrow x = 4$

$2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 < 8 \Rightarrow$ el punto $(0, 0)$ no pertenece al semiplano definido por $2x + 2y \geq 8$.

$4x + 12y = 24$: $x = 0 \Rightarrow y = 2$; $y = 0 \Rightarrow x = 8$

$4 \cdot 0 + 12 \cdot 0 = 0 < 24 \Rightarrow$ el punto $(0,0)$ no pertenece al semiplano definido por $4x + 12y \geq 24$.

La determinación de las partes del plano definida por cada una de las inecuaciones $0 \leq x \leq 7$, $0 \leq y \leq 7$ no tiene ninguna dificultad.

El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos determinados por el polígono ABCDEF.

Dibujemos la recta $2x + 1{,}6y = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 5 \Rightarrow x = -4$.

La recta paralela a esta última que pasa por el vértice A tiene en común con el polígono de soluciones factibles sólo el punto A. Las coordenadas de A son los valores pedidos.

$$\left.\begin{array}{l} 6x + 2y = 12 \\ 2x + 2y = 8 \end{array}\right| \Rightarrow 4x = 4;\ x = 1 \Rightarrow y = 3$$

La primera fábrica debe trabajar un día y la segunda tres días

4.15 Una compañía posee dos minas: La mina A produce diariamente 1 tonelada de mineral de hierro de alta calidad, 3 toneladas de mineral de calidad media y 5 toneladas de mineral de baja calidad; la mina B produce cada día 2 toneladas de las tres calidades. La compañía necesita al menos 80 toneladas de mineral de alta calidad, 160 toneladas de mineral de calidad media y 200 toneladas de calidad baja.

Sabiendo que el costo diario de la operación es de 200.000 pts. en cada mina, ¿cuántos días debe trabajar cada mina para que el costo sea el mínimo?

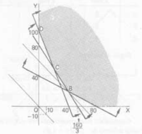
(Univ. de Salamanca, 1992)

Sea x los días que trabaja la mina A e y los días que trabaja la mina B.

La función a minimizar es $200000x + 200000y$, o lo que es igual: $x + y$.

La información la podemos resumir en el siguiente cuadro:

	A	B	total
hierro alta calidad	1	2	$\geqslant 80$
hierro calidad media	3	2	$\geqslant 160$
hierro baja calidad	5	2	$\geqslant 200$



Según el enunciado:

$$\begin{array}{r} x + 2y \geqslant 80 \\ 3x + 2y \geqslant 160 \\ 5x + 2y \geqslant 200 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}$$

Región del plano definida por las restricciones:

$x+2y=80$: $x=0 \Rightarrow y=40$; $y=0 \Rightarrow x=80$

$0+2\cdot 0=0<80 \Rightarrow$ el punto (0,0) no pertenece al semiplano definido por la inecuación $x+2y \geqslant 80$.

$3x+2y=160$: $x=0 \Rightarrow y=80$; $y=0 \Rightarrow x=\frac{160}{3} \approx 53{,}3$

$3\cdot 0+2\cdot 0<160 \Rightarrow$ el punto (0,0) no pertenece al semiplano definido por la inecuación $3x+2y \geqslant 160$.

$5x+2y=200$: $x=0 \Rightarrow y=100$; $y=0 \Rightarrow x=40$

$5\cdot 0+2\cdot 0=0<200 \Rightarrow$ el punto (0,0) no pertenece al semiplano definido por la inecuación $5x+2y \geqslant 200$.

Considerando también los semiplanos $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, el conjunto de soluciones posibles es el sombreado en la figura.

Representemos la recta $x+y=0$; $x=0 \Rightarrow y=0$; $x=10$, $y=-10$:

Trasladando esta recta paralelamente a sí misma, obtendremos una posición en la que es tangente al conjunto de soluciones posibles en el punto B. Las coordenadas de B hacen mínima la función objetivo.

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x+2y=80 \\ (2) & 3x+2y=160\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l}(1) \\ (2')=(2)-(1)\end{array} \quad \left.\begin{array}{r}x+2y=80 \\ 2x \quad =80\end{array}\right\} \Rightarrow x=40 \qquad 2y=80-40=40;\ y=20$$

$\boxed{\text{El coste será mínimo si se trabajan 40 días en la mina A y 20 en la mina B}}$

4.16 **Plantear la función de optimización y el conjunto de restricciones del siguiente problema, explicando cada paso:**

"En una granja se preparan dos clases de piensos, P y Q, mezclando dos productos A y B. Un saco de P contiene 8 kilos de A y 2 de B, y un saco de Q contiene 10 kilos de A y 5 de B. Cada saco de P se vende a 300 pts. y cada saco de Q a 800 pts.

Si en la granja hay almacenados 80 kilos de A y 25 de B, ¿cuántos sacos de cada tipo de pienso deben preparar para obtener los máximos ingresos?"

(Univ. de Cantabria, 1992)

Sea x los sacos de pienso P e y los sacos de pienso Q que se deben preparar para obtener los máximos ingresos:

La función de optimización es: $z = 300x + 800y$.

La información la podemos resumir en el siguiente cuadro:

	P x	Q y	total de kilos
A	8	10	≤ 80
B	2	5	≤ 25

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 8x+10y \leq 80 \\ 2x+\ \ 5y \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right| \text{ conjunto de restricciones.}$$

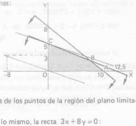
Hallemos la región del plano definido por las restricciones:

$8x+10y=80$: $x=0 \Rightarrow y=8$; $y=0 \Rightarrow x=10$

$8\cdot 0+10\cdot 0=0<80 \Rightarrow$ el punto (0,0) está en el semiplano definido por la inecuación $8x+10y \leq 80$.

$2x+5y=25$: $x=0 \Rightarrow y=5$; $y=0 \Rightarrow x=12{,}5$

$2\cdot 0+5\cdot 0=0<25 \Rightarrow$ el punto (0,0) está en el semiplano definido por la inecuación $2x+5y \leq 25$.



Considerando también los semiplanos $x \geq 0$ e $y \geq 0$, el conjunto de soluciones posibles son las coordenadas de los puntos de la región del plano limitada por el polígono OABC.

Representemos la recta $300x+800y=0$, o lo que es lo mismo, la recta $3x+8y=0$:

$x=0 \Rightarrow y=0$; $x=-8 \Rightarrow y=3$

Transladando esta recta paralelamente a sí misma, obtendremos una posición en que es tangente al polígono OABC en el punto C. Las coordenadas de C hacen máxima la función de optimización, o sea,

$\boxed{\text{deben prepararse 0 sacos de pienso P y 5 sacos de pienso Q.}}$

4.17 **La casa X fabrica helados A y B, hasta un máximo diario de 1000 kg. La fabricación de un kg de A cuesta 180 ptas, y uno de B, 150. Calcular cuántos kg de A y B deben fabricarse, sabiendo que la casa dispone de 270 000 ptas/día y que un kg de A deja un margen igual al 90 % del que deja uno de B.**

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria, 1991)

Sean x e y los kilos de A y B que se fabrican en un día.

Según el enunciado:

$$x + y \leq 1000$$
$$180\,x + 150\,y \leq 270000$$
$$x \geq 0 \;;\; y \geq 0$$

Si b es el beneficio en un kilo de B, 0,9 b es el beneficio en un kilo de A.

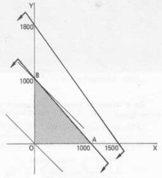
El beneficio en x kilos de A e y kilos de B será

$$z = 0{,}9bx + by$$

Con las condiciones anteriores tenemos que hallar el máximo de z, o lo que es lo mismo, el máximo de

$$9x + 10y$$

Hallemos el conjunto de soluciones factibles:



$x + y = 1000$: $x = 0 \Rightarrow y = 1000$;
$y = 0 \Rightarrow x = 1000$

$0 + 0 < 1000 \Rightarrow$ el punto (0,0) está en el semiplano definido por la inecuación $x + y \leq 1000$.

$180x + 150\,y = 270000$: $x = 0 \Rightarrow y = 1800$; $y = 0 \Rightarrow x = 1500$

$180 \cdot 0 + 150 \cdot 0 = 0 < 270000 \Rightarrow$ el punto (0,0) está en el semiplano definido por la inecuación $180\,x + 150\,y \leq 270000$

El conjunto de soluciones factibles es el de los puntos determinados por el polígono OAB.

Dibujemos la recta $9x + 10y = 0$: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $x = -1000 \Rightarrow y = 900$

La recta paralela a esta última que pasa por el punto B tiene en común con el polígono de soluciones factibles sólo el punto B. Las coordenadas de este punto son los valores pedidos.

Se obtendrá el beneficio máximo fabricando 1000 cajas de B y ninguna de A.

CAPITULO 5

FUNCIONES NUMERICAS DE UNA VARIABLE REAL
LIMITES
CONTINUIDAD

FUNCIONES NUMERICAS DE UNA VARIABLE REAL

Una *función numérica de una variable real* es una aplicación de un conjunto A de números reales en el conjunto de los números reales. O sea, es una ley que hace corresponder a cada elemento de A un número real.

La función f de A en R se simboliza así:

$$f: A \to R$$
$$x \mapsto f(x)$$

lo que indica que al elemento genérico $x \in A$ le corresponde el número real $f(x)$. Se dice también que $f(x)$ es el valor de la función en el punto x.

Al conjunto A se le llama *dominio, conjunto de definición, o campo de definición de* f, y al conjunto de los números reales cuyos elementos son los transformados, mediante f, de los elementos de A se le llama *imagen de* f. La imagen de A por f se simboliza por f(A).

$$f(A) = \{y / y \in R, \text{ existe al menos un } x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}$$

Respecto de un sistema de referencia $\{0, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ del plano, el conjunto (C) de los puntos M(x, y) del plano tales que

$$x \in A, \quad y = f(x)$$

se llama **gráfica** o **curva** de la función f.

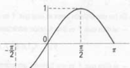
Se dice que la ecuación cartesiana de la curva (C) es $y = f(x)$.

Si $f: A \to R$ tal que $f(x) = \text{sen}\, x$:

$A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(A) = [-1, 1]$

$A = [0, \pi] \Rightarrow f(A) = [0, 1]$

$A = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow f(A) =]0, 1[$



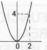
Al elemento genérico $x \in A$ se le suele llamar variable independiente, y al elemento genérico de f(A), $y = f(x)$, se le suele llamar variable dependiente.

La función $f: A \to R$ está **acotada superiormente** si existe un número real C tal que para todo $x \in A$ se verifica que $f(x) \leq C$. A los números C que cumplen esta propiedad se les llama mayorantes o cotas superiores.

La función f está **acotada inferiormente** si existe un número real c tal que para todo $x \in A$ se verifica que $f(x) \geq c$. A los números c que cumplen esta condición se les llama minorantes o cotas inferiores.

La función f está **acotada** si está acotada superior e inferiormente. O bien si existe un número real positivo P tal que para todo $x \in A$ se verifica que $|f(x)| \leq P$.

Sea la función $f: A \to R$ definida por $f(x) = x^2$:



– si $A = [0, 2]$, la función está acotada superiormente: $\forall x \in A$, $f(x) = x^2 \leq 4$
la función está acotada inferiormente: $\forall x \in A$, $f(x) > -5$
la función está acotada, por estar acotada inferior y superiormente.

– si $A = R$, la función no está acotada superiormente, ya que cualquiera que sea el número real M, siempre existe un $x \in A = R$, tal que $f(x) = x^2 \geq M$, x puede ser cualquier número igual o mayor que $\sqrt{M}$.
la función está acotada inferiormente: $\forall x \in A$, $f(x) \geq 0$.
la función no está acotada, por no estarlo superiormente.

A la menor de las cotas superiores de f se le llama *extremo superior* de la función f en A, y se simboliza por $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$. A la mayor de las cotas inferiores de f se le llama *extremo inferior* de la función f en A, y se simboliza por $m = \inf\limits_{x \in A} f(x)$.

El extremo superior e inferior pueden o no pertenecer a $f(A)$.

Sea la función $f: A \to R$ definida por $f(x) = x^2$
– si $A = [0, 1]$: $M = \sup f(x) = 1$; $m = \inf f(x) = 0$, ambos pertenecen a $f(A)$.
– si $A =]0, 1[$: $M = \sup f(x) = 1$; $m = \inf f(x) = 0$, ni M ni m pertenecen a $f(A)$.

Si B es un subconjunto del conjunto de definición de la función $f: A \to R$:
– se dice que f es una **función constante** en B si:

$$\forall (x_1, x_2) \in B^2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

o bien, existe un número real k tal que: $\forall x \in B$, $f(x) = k$.
– se dice que f es una **función creciente** en B si:

$$\forall (x_1, x_2) \in B^2 \ / \ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

– se dice que f es una **función decreciente** en B si

$$\forall (x_1, x_2) \in B^2 \ / \ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

En los dos últimos casos se dice que f es una **función monótona** en B.
– se dice que f es una función **estrictamente creciente** en B si:

$$\forall (x_1, x_2) \in B^2 \ / \ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

– se dice que f es una función **estrictamente decreciente** en B si

$$\forall (x_1, x_2) \in B^2 \ / \ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

La función $f: A \to R$ tiene un **máximo relativo** en $x_o \in A$ si existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$\forall x \in A \ , \ x_o - \epsilon < x < x_o + \epsilon \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(x_o)$$

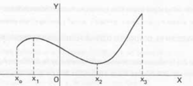
Si la desigualdad es válida para todo $x \in A$, se dice que f tiene un **máximo absoluto** en x_o.

La función $f: A \to R$ tiene un **mínimo relativo** en $x_o \in A$ si existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$\forall x \in A \ , \ x_o - \epsilon < x < x_o + \epsilon \ \Rightarrow \ f(x) \geq f(x_o)$$

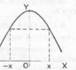
Si la desigualdad es válida para todo $x \in A$, se dice que f tiene un **mínimo absoluto** en x_o.

Se llama extremo de la función f a todo máximo o mínimo de f.



Si la gráfica de la función es la de la figura, la función f tiene en x_3 un máximo absoluto, en x_1 un máximo relativo, en x_o un mínimo relativo y en x_2 un mínimo absoluto.

La función $f: A \to R$ es **par** si: $\begin{cases} x \in A \iff -x \in A \\ f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A \end{cases}$

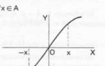


La curva de toda función par es simétrica respecto del eje OY si el sistema de referencia $\{0, i, j\}$ es ortonormal. Para estudiar la función f basta con hacerlo en $D = A \cap [0, +\infty[$.

La función $f: A \to R$ definida por $f(x) = x^2$ es par si $A = [-a, a]$ o $A =]-a, a[$, o $A = [-b, -a] \cup [a, b]$ o $A =]-b, -a[\cup]a, b[$.

La función $f: A \to R$ es **impar** si: $\begin{cases} x \in A \iff -x \in A \\ f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A \end{cases}$

La curva de toda función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas. Para estudiar la función f basta con hacerlo en $D = A \cap [0, +\infty[$.



La función $f: A \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ es impar si A es cualquiera de los conjuntos del ejemplo anterior.

La función $f: A \to R$ es **periódica** si existe un número real positivo T tal que: $\begin{cases} x \in A \iff x + T \in A \\ f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in A \end{cases}$

El *periodo* de f es el menor valor de T que verifica la propiedad anterior.

Para estudiar una función periódica de periodo T_o, basta con hacerlo en $D = A \cap [a, a + T_o]$, siendo a un número real cualquiera perteneciente a A. Se suele tomar $a = 0$ si $0 \in A$.

La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ es periódica de periodo 2π.

La función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \cos x$ es periódica de periodo 2π.

La función $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{sen}(ax + b)$ es periódica de periodo $\frac{2\pi}{a}$

La función $f: A \to \mathbb{R}$ **es algebraica** si existe un polinomio P con dos variables y coeficientes reales tal que $P[x, f(x)] = 0 \;\; \forall x \in A$.

La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{3x^2+5}}$ es algebraica, ya que:

$$y^2 = \frac{(x-2)^2}{3x^2+5} \;\;\Rightarrow\;\; (3x^2+5)y^2 - (x-2)^2 = 0$$

Si una función no es algebraica se dice que es una función **transcendente**.

Las funciones: $x \mapsto \operatorname{sen} x$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \operatorname{tg} x$; $x \mapsto e^x$; $x \mapsto \log x$ son tanscendentes.

OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LAS FUNCIONES NUMERICAS DE UNA VARIABLE REAL.

Sean f y g dos funciones que tienen el mismo conjunto de definición A.

Se llama *suma* de las funciones f y g a la función $h = f + g$ definida por $h(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, se llama *producto de la función* f *por el escalar* λ a la función $h = \lambda \cdot f$ definida por $h(x) = \lambda \cdot f(x)$, $\forall x \in A$.

Se llama *producto* de las funciones f y g a la función $h = f \cdot g$ definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in A$.

Si $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, y $g: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3x^2 - x + 1$ se tendrá que $h = f \cdot g: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ está definida por $h(x) = f(x) \cdot g(x) = (\operatorname{sen} x) \cdot (3x^2 - x + 1)$.

Si los conjuntos de definición de las funciones f y g son A y B, las funciones $f + g$ y $f \cdot g$ están definidas en $A \cap B$.

Si f es una función de dominio A y g una función de dominio f(A), se llama **función compuesta** de f por g, a la función $h = g \circ f$ definida por $h(x) = g[f(x)] \quad \forall x \in A$.

Si $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, y $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3x^2 - x + 1$, se tendrá que $h = g \circ f$ está definida por $h(x) = g[f(x)] = 3(\operatorname{sen} x)^2 - \operatorname{sen} x + 1$.

Si la función $f: A \to B$ es biyectiva, se llama **función recíproca de** f y se simboliza por f^{-1}, la aplicación de B en A definida de la siguiente forma:

$$\boxed{x \in A, \;\; f(x) = y} \;\;\Rightarrow\;\; \boxed{y \in B, \;\; f^{-1}(y) = x}$$

En un sistema de referencia ortonormal, las curvas de las funciones f y f^{-1} son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

La función $f: [0, 4] \to [-2, 10]$ definida por $f(x) = 3x - 2$ es biyectiva, ya que cualquiera que sea $y \in [-2, 10]$ la ecuación $3x - 2 = y$, tiene una y sólo una solución: $x = \dfrac{y+2}{3}$. Esto implica que la función f tiene recíproca, que se define así:

$$f^{-1}: [-2, 10] \to [0, 4], \text{ tal que } f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

La función $f: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, tiene función recíproca, siendo $f^{-1}: [-1, 1] \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x$.

FUNCIONES ELEMENTALES DE UNA VARIABLE REAL

Función potencial: $x \mapsto x^n$

Función polinómica: $x \mapsto a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

Función racional: $x \mapsto \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}$, definida para todo $x \in R$ que no anule el denominador.

Función exponencial: $x \mapsto a^x \quad (a > 0)$

Función logarítmica: $x \mapsto \log_a x \quad (a > 0, x > 0)$

Funciones circulares o trigonométricas: $x \mapsto \operatorname{sen} x$; $x \mapsto \cos x$; $x \mapsto \operatorname{tg} x$; $x \mapsto \operatorname{ctg} x$

LIMITE DE UNA FUNCION REAL EN UN PUNTO.

Sea f una función real definida en el intervalo $I \subset R$, y a un punto de I.

Se dice que f tiene como límite el número real l cuando x tiende hacia a, si a todo número real positivo ϵ se puede hacer corresponder otro número real positivo δ, tal que para todo $x \in I$, $x \neq a$ y $|x-a| < \delta$, se verifica que $|f(x) - l| \leq \epsilon$. Se escribe: $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \left(\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ |x-a| < \delta,\ x \in I,\ x \# a \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon\right)}$$

l_1 es el **límite por la derecha** en el punto a ($\lim_{x \to a^+} f(x) = l_1$) si:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ a < x < a + \delta,\ x \in I \Rightarrow |f(x) - l_1| \leq \epsilon}$$

l_2 es el **límite por la izquierda** en el punto a ($\lim_{x \to a^-} f(x) = l_2$) si:

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ a - \delta < x < a,\ x \in I \Rightarrow |f(x) - l_2| \leq \epsilon}$$

Para que exista el límite de la función f cuando x tiende hacia a es necesario y suficiente que existan los límites por la derecha y por la izquierda y ambos límites sean iguales.

Se suele facilitar el cálculo del $\lim_{x \to a} f(x)$ haciendo el cambio $x = a + h$, de donde resulta:

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h)$. Para los límites laterales haremos $x = a + h$, $h > 0$, para el cálculo del límite por la derecha y $x = a - h$, $h > 0$, para el límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a + h) \quad ; \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a - h)$$

Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = E(x)$, siendo $E(x)$ la parte entera de x, o el mayor número entero igual o menor que x. Veamos si existe el $\lim_{x \to 2} f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2 + h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} E(2 + h) = 2 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2 - h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} E(2 - h) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

existen ambos límites laterales en $x = 2$, pero, como son distintos, no existe el límite ordinario de f en $x = 2$.

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff \left(\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 / |x - a| < \delta,\ x \in I \Rightarrow f(x) \geq M\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff \left(\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 / |x - a| < \delta,\ x \in I \Rightarrow f(x) \leq -M\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \iff \left(\forall\epsilon>0,\ \exists M>0 / x>M,\quad x\in I \Rightarrow |f(x)-l|\le\epsilon\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \iff \left(\forall\epsilon>0,\ \exists M>0 / x<-M,\quad x\in I \Rightarrow |f(x)-l|\le\epsilon\right)}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \left(\forall M>0,\ \exists P>0 / x>P,\quad x\in I \Rightarrow f(x)>M\right)}$$

De la misma forma se definen: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, y $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) = -\infty$

Si existe el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, este límite es único.

CALCULO DE LIMITES.

— $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (si no resulta: $\infty-\infty$)

— si $\lambda\in R$, $\lim\limits_{x\to a} [\lambda\cdot f(x)] = \lambda\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$

— $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]\cdot[\lim\limits_{x\to a} g(x)]$ (si no resulta: $0\cdot\infty$)

— si $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ (si no resulta: $\frac{\infty}{\infty}$)

— si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(o\ -\infty)$: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

— si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ $(o\ -\infty)$

— si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y la función g está acotada: $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = 0$

— si $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$: $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (si no resulta: ∞^0 ó 1^∞)

— si $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$: $\lim\limits_{x\to a} \log_b f(x) = \log_b [\lim\limits_{x\to a} f(x)]$

— $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$

— si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim\limits_{y\to b} g(y) = l$: $\lim\limits_{x\to a} [g\circ f](x) = \lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = l$

— si en un entorno de a se verifica que $f(x)\le h(x)\le g(x)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} h(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

y si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$, se tiene que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$

FUNCIONES EQUIVALENTES EN UN PUNTO. Las funciones f y g son equivalentes en el punto a (a finito, $+\infty$ ó $-\infty$) si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Se dice que la función f es un *infinitésimo* en el punto a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Si la función f es un infinitésimo en el punto a y

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = k \quad \text{(finito distinto de 0)}$$

se dice que f es un *infinitésimo de orden n* en el punto *a*, siendo $k(x-a)^n$ la *parte principal* del in finitésimo f en el punto *a*. Los infinitésimos equivalentes tienen igual parte principal.

Las funciones $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^3 - 3x + 2$ y $g: R \to R$ definida por $g(x) = (x-1)^2$ son infi nitésimos en el punto 1, ya que:

$$\lim_{x\to 1} (x^3 - 3x + 2) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1} (x-1)^2 = 0$$

Como $x = 1$ es raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$, rebajamos de grado por Rufini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array} \Rightarrow f(x) = (x-1)^2(x+2)$$

Las funiones f y g no son equivalentes en el punto 1, ya que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} (x+2) = 3 \neq 1$$

La función f es un infinitésimo de orden 2 en el punto 1, siendo su parte principal $3(x-1)^2$.

Las equivalencias más usadas son:

$\operatorname{sen} x \approx x$	en 0	$\operatorname{arc\,sen} x \approx x$	en 0	$e^x - 1 \approx x$	en 0
$\operatorname{tg} x \approx x$	en 0	$\operatorname{arc\,tg} x \approx x$	en 0	$a^x - 1 \approx x \log a$	en 0
$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$	en 0	$\log(1+x) \approx x$	en 0	$\log x \approx x - 1$	en 1

Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_{p+1} x^{p+1} + a_p x^p$ es un polinomio donde $n > p$, $a_n \neq 0$ y $a_p \neq 0$:

$$f(x) \approx a_n x^n \text{ en } \infty ; \quad f(x) \approx a_p x^p \text{ en } 0$$

En el cálculo de los límites se puede sustituir.cualquier infinitésimo, que esté como factor o divis por otro infinitésimo equivalente o por su parte principal.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)(\operatorname{sen} x)^2}{x \cdot \operatorname{arc\,tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\cdot x^2}{x \cdot x} = \lim_{x\to 0} (x+1) = 1$$

LIMITES INDETERMINADOS. Existen siete tipos, expresados simbólicamente así:

$\infty - \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	0^0	∞^0	1^∞

No hay reglas fijas para calcular estos tipos de límites, pero la mayoría se pueden llevar al tipo $\frac{0}{0}$ lo que nos permite aplicar la regla de L'Hopital que veremos en el capítulo 11.

El tipo $\infty - \infty$, cuando $\lim f(x) = +\infty$ y $\lim g(x) = -\infty$, se lleva al tipo $\frac{0}{0}$ así:

$$\lim [f(x) - g(x)] = \lim\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$$

El límite $0 \cdot \infty$, cuando $\text{lím } f(x) = 0$ y $\text{lím } g(x) = \infty$, se lleva al tipo $\dfrac{0}{0}$ así:

$$\text{lím } [f(x) \cdot g(x)] = \text{lím } \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$$

Los límites de los tipos 0^0, ∞^0 y 1^∞, se suelen hallar empleando la igualdad: $A^B = e^{B \cdot \log A}$

En el caso 1^∞, cuando $\text{lím } f(x) = 1$ y $\text{lím } g(x) = \infty$:

$$\text{lím } [f(x)]^{g(x)} = e^{\text{lím}[g(x) \cdot \log f(x)]} = e^{\text{lím } g(x)[f(x) - 1]}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+5}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{x+5}{x} - 1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x \frac{x+5-x}{x}} = e^5$$

CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO.

Sea f una función real definida en el intervalo $I \subset R$, y a un punto de I.

Se dice que la función f es **continua** en el punto a sí y solo sí existe el límite de f en a, y este límite es igual a $f(a)$.

O lo que es lo mismo: La función f es continua en el punto a si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1º La función f está definida en a, es decir, existe $f(a)$.

2º Existe el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

3º $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$$\boxed{\text{la función } f \text{ es continua en } a \iff \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a-h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a+h) = f(a)}$$

La función f es **continua por la derecha** en el punto a sí y solo sí existe el límite por la derecha de f en a, y este límite es igual a $f(a)$.

$$\boxed{\text{la función } f \text{ es continua por la derecha en } a \iff \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a+h) = f(a)}$$

La función f es **continua por la izquierda** en el punto a si y solo si existe el límite por la izquierda de f en a, y este límite es igual a $f(a)$.

$$\boxed{\text{la función } f \text{ es continua por la izquierda en } a \iff \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(a-h) = f(a)}$$

La función f es continua en el punto a si es continua por la derecha y por izquierda en el punto a.

Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = E(x)$, siendo $E(x)$ la parte entera de x. Veamos si la función es continua en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(1-h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} E(1-h) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(1+h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} E(1+h) = 1 \\ f(1) = E(1) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \text{lím } f(1-h) \neq \text{lím } f(1+h) = f(1) \Rightarrow$$

la función f es continua por la derecha en el punto 1, no es continua por la izquierda en el punto 1 y no es continua en el punto 1.

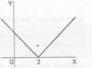
Si la función f no es continua en $x = a$, se dice que a es un *punto de discontinuidad* de f.
Tres casos de discontinuidad pueden presentarse:

a) Existen y son iguales los límites por la derecha y por la izquierda en el punto a, pero estos límites son distintos de f(a). Se dice que la función f tiene una *discontinuidad evitable*.

La función g deducida de f cambiando solamente su valor en el punto a, $g(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, es continua en el punto a. Se dice que la función g se ha obtenido de la función f por *prolongación de continuidad.*

La función f: $R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ es discontinua en $x = 2$:

Considerando que $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2) = -x+2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2-h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} [-(2-h)+2] = \lim\limits_{h \to 0} h = 0 \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2+h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} [(2+h)-2] = \lim\limits_{h \to 0} h = 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2-h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2+h) \neq f(2) \Rightarrow$ la función f no es continua en $x = 2$.

La función g: $R \to R$ definida por $g(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$

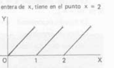
La función g se ha obtenido de la función f por *prolongación de continuidad.*

b) Existen los límites por la derecha y por la izquierda en el punto a, pero son distintos. Se dice que la función f tiene una *discontinuidad de primera especie* en el punto a.

La función f: $R \to R$ definida por $f(x) = x - E(x)$, siendo $E(x)$ la parte entera de x, tiene en el punto $x = 2$ una discontinuidad de primera especie:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2-h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} [(2-h) - E(2-h)] = \lim_{h \to 0} (2-h-1) = 1$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2+h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} [(2+h) - E(2+h)] = \lim_{h \to 0} (2+h-2) = 0$$

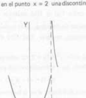


c) Uno al menos, de los límites por la derecha y por la izquierda en el punto a no existe o es infinito. Se dice que la función f tiene una *discontinuidad de segunda especie* en el punto a.

La función f: $R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ tiene en el punto $x = 2$ una discontinuidad de segunda especie:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2-h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} (2-h)^2 = 4$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2+h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{(2+h)-2} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} = +\infty$$



PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN UN PUNTO.

Si f y g son continuas en el punto *a*, también son continuas en dicho punto las funciones:

$$f+g \;;\quad \lambda f \quad \forall\lambda\in R \;;\quad \frac{f}{g} \quad \text{si} \quad g(a)\neq 0 \;;\quad |f|$$

Si f es continua en el punto *a* y g es continua en el punto $b = f(a)$, la función $g \circ f$ es continua en *a*.

Si la función f es continua en el punto *a*, existe un entorno de *a* donde la función está acotada.

Si la función f es continua en el punto *a* y es $f(a) \neq 0$, existe un entorno de *a* tal que la función no se anula en ninguno de sus puntos y el signo de f(x) en los puntos de dicho entorno es el de f(a).

CONTINUIDAD EN UN INTERVALO.

La función f es *continua en el intervalo abierto* $]a, b[$ si es continua en todo punto de $]a, b[$.

La función f es *continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$ si es continua en el intervalo abierto $]a, b[$, continua por la derecha en el punto *a* y continua por la izquierda en el punto *b*.

La imagen de un intervalo cerrado, por una función continua, es un intervalo cerrado.

Las funciones polinómicas son continuas en todo intervalo real.

Las funciones racionales: $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde P(x) y Q(x) son funciones polinómicas, son continuas en todo intervalo real que no contenga ningún punto que anule el denominador.

Las funciones trigonométricas: $x \mapsto \operatorname{sen} x$, $x \mapsto \cos x$ son continuas en todo intervalo de **R**.

La función trigonométrica: $x \mapsto \operatorname{tg} x$ es continua en todo intervalo real que no contenga ningun punto de la forma $(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, siendo k un número entero.

La función potencial: $x \mapsto x^\alpha$, siendo α un número real cualquiera, es continua en todo intervalo de $]0, +\infty[$.

La función exponencial: $x \mapsto a^x$, siendo $a > 0$, es continua en todo intervalo de **R**.

La función logarítmica: $x \mapsto \log_a x$, siendo $a > 0$, es continua en todo intervalo de $]0, +\infty[$.

Teorema de Weierstrass. Si la función f es continua en el intervalo $I = [a, b]$, cerrado y acotado (compacto), alcanza en él, al menos una vez, su máximo y mínimo absolutos.

Teorema de los valores intermedios. Si la función f es continua en el intervalo I (acotado o no) y $m = \inf_{x\in I} f(x)$ y $M = \sup_{x\in I} f(x)$, para todo número real λ tal que $m < \lambda < M$, existe al menos un $x_o \in I$ tal que $f(x_o) = \lambda$.

Si la función f es continua en el intervalo compacto $I = [a, b]$, para todo número real λ comprendido entre f(a) y f(b) existe al menos un $x_o \in I$ tal que $f(x_o) = \lambda$.

Teorema de Bolzano. Si la función f es continua en el intervalo $[a, b]$, teniendo f(a) y f(b) signos opuestos, es decir, $f(a)\cdot f(b) < 0$, existe al menos un punto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

La ecuación $x^3 + 5x + 2 = 0$ tiene al menos una raíz real.

En efecto, sea f la función definida por $f(x) = x^3 + 5x + 2$, que por ser una función polinómica es continua en **R**.

$$f(-1) = -1 - 5 + 2 = -4 \;;\quad f(1) = 1 + 5 + 2 = 8 \;\Rightarrow\; f(-1)\cdot f(1) < 0 \;\Rightarrow$$

por el teorema de Bolzano, al ser la función continua en $[-1, 1]$, existe $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = 0$.

PROBLEMAS

5.1 Calcular $E = \lim_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x^2 - 9}$

(Univ. de Badajoz)

El denominador se anula para $x = 3$.
Veamos qué valor toma el numerador para $x = 3$. Aplicando Rufini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 9 & -27 \\ 3 & & 3 & 0 & 27 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 9x - 27 = (x-3)(x^2+9)$$

de donde: $$E = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+9)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2+9}{x+3} = \frac{9+9}{3+3} = \boxed{3}$$

5.2 Determinar a para que se verifique

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+ax+1} - x) = 2$$

(Univ. de Sevilla)

Multiplicando y dividiendo por la conjugada de la expresión entre paréntesis, y considerando que $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$:

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{x^2+ax+1} - x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax+1} - x)(\sqrt{x^2+ax+1} + x)}{\sqrt{x^2+ax+1} + x} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(x^2+ax+1) - x^2}{\sqrt{x^2+ax+1} + x} = \lim_{n \to +\infty} \frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1} + x} =$$

(dividiendo numerador y denominador por x)

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{a + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{a+0}{\sqrt{1+0+0} + 1} = \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

5.3 Calcular $E = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$

(Univ. de Madrid, 1991)

Multiplicando y dividiendo por la conjugada:

$$E = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})\,(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\,(x+a-x)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$

dividiendo numerador y denominador por $\sqrt{x}$:

$$E = \lim_{x \to +\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} = \frac{a}{1+1} = \boxed{\frac{a}{2}}$$

5.4 Calcular el límite de la función

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$$

al tender x respectivamente hacia 0, 1 y $+\infty$.

(Univ. de Pamplona)

Si x tiende hacia 0 tenemos un límite del tipo $\frac{0}{0}$.

De $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, haciendo $a = b = \frac{x}{2}$:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \implies 1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}:$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

Si x tiende hacia 1 no tenemos indeterminación:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos 1}{1} = 1 - \cos 1 \quad \text{(se entiende coseno de un radián)}$$

Si x tiende hacia infinito, como $\forall x$: $-1 \leq \cos x \leq 1$, el numerador de $f(x)$ está acotado, y el denominador tiende a infinito, luego el límite es 0.

5.5 Calcular $E = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$

(Univ. de Málaga)

Al existir una expresión exponencial, cuando nos dicen que $x \to \infty$, habrá que diferenciar, al calcular el límite, cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$.

Para $x \to +\infty$, tenemos un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Dividiendo numerador y denominador por e^x:

$$E = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{\text{sen}\, x}{e^x}}{1+\dfrac{\cos x}{e^x}} = \frac{1+0}{1+0} = \boxed{1}$$

ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{sen}\, x}{e^x} = 0$ por tratarse del cociente de una expresión acotada, $-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1$, por otra que tiende a infinito. Lo mismo ocurre con $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{e^x} = 0$.

Para $x \to -\infty$, haciendo el cambio $x = -t$, para $x \to -\infty$, $t \to +\infty$:

$$E = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t} + \text{sen}\,(-t)}{e^{-t} + \cos\,(-t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{e^t} - \text{sen}\, t}{\dfrac{1}{e^t} + \cos t}$$

en un entorno de $+\infty$: $\dfrac{\dfrac{1}{e^t} - \text{sen}\, t}{\dfrac{1}{e^t} + \cos t} \approx \dfrac{0 - \text{sen}\, t}{0 + \cos t} = -\text{tg}\, t$, tomando $\text{tg}\, t$ todos los valores del intervalo $]-\infty, +\infty[$, lo que nos dice que no existe el límite pedido.

5.6 Calcular $E = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$

(Univ. de Madrid)

Es un límite del tipo 1^∞.

$$E = e^\lambda \text{, siendo } \lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1} - 1\right)x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3-2x+1}{2x-1}\cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{2x-1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{2-\dfrac{1}{x}} = \frac{4}{2-0} = 2 \Rightarrow \boxed{E = e^2}$$

5.7 Calcular el valor de la constante c para que el límite de la función

$$f(x) = \left(\frac{x+3}{x}\right)^{cx}$$

sea e al tender x hacia $+\infty$.

(Univ. de Pamplona)

Es un límite del tipo 1^∞:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^\lambda, \text{ siendo } \lambda = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x} - 1\right) cx = \lim_{x\to+\infty} \frac{3cx}{x} = 3c \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{3c} = e \Rightarrow c = \boxed{\frac{1}{3}}$$

5.8 Calcular $$E = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

(Univ. de Madrid, 1991)

Es un límite del tipo $1^{+\infty}$.

$$E = e^{\lambda} \text{ ; siendo } \lambda = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{sen} x} - 1\right) \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1+\operatorname{tg} x - 1 - \operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \, \frac{1}{\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{1+0} \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{1} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = e^0 = \boxed{1}$$

5.9 Probar que la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$$

no es continua en $x = 1$. Indicar qué tipo de discontinuidad se presenta en dicho punto.

(Univ. de La Laguna–Tenerife)

La función no es continua en $x = 1$ puesto que en este punto no existe la función, el denominador se hace 0 y la división por 0 no existe.

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(1-h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{(1-h)^2-1}{(1-h)^3+7(1-h)-8} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1-2h+h^2-1}{1-3h+3h^2-h^3+7-7h-8} =$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{-2h+h^2}{-10h+3h^2-h^3} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{-2+h}{-10+3h-h^2} = \frac{-2}{-10} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(1+h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{(1+h)^2-1}{(1+h)^3+7(1+h)-8} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1+2h+h^2-1}{1+3h+3h^2+h^3+7+7h-8} =$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{2h+h^2}{10h+3h^2+h^3} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{2+h}{10+3h+h^2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Como los límites por la derecha y por la izquierda son iguales, la función f tiene en $x = 1$ una discontinuidad evitable.

La función g: $R \to R$ definida por $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^3+7x-8} & \text{si } x \neq 1 \\[2mm] \dfrac{1}{5} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

es continua en $x = 1$

La función g se ha obtenido de la función f por prolongación de continuidad.

5.10 **Estudiar la continuidad de la función $f: R \to R$, definida por $f(x) = x - E(x)$.**
E(x) designa la "parte entera de x", esto es, el mayor entero menor o igual que x.

(Univ. de Madrid)

Si $a \in \mathbf{Z}$: $\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(a-h) = \lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}} \left((a-h) - E(a-h)\right) = \lim\limits_{h\to o} \left(a - h - (a-1)\right) = \lim\limits_{h\to o} (1-h) = 1$

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(a+h) = \lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} \left((a+h) - E(a+h)\right) = \lim_{h\to o} (a+h-a) = \lim_{h\to o} h = 0$$

como los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales, *la función no es continua en el punto a, si a es un número entero.*

Si $a \notin \mathbf{Z}$, sea $a = b + k$, siendo b un número entero y $0 < k < 1$:

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(a-h) = \lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} \left((a-h) - E(a-h)\right) = \lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} \left((b+k-h) - E(b+k-h)\right) = \lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} (b+k-h-b) = k$$

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(a+h) = \lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} \left((a+h) - E(a+h)\right) = \lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} \left((b+k+h) - E(b+k+h)\right) = \lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} (b+k+h-b) = k$$

$$f(a) = f(b+k) = (b+k) - E(b+k) = b+k-b = k$$

como $\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(a-h) = \lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(a+h) = f(a)$, *la función es continua en el punto a, si a no es un número entero.*

5.11 **Hallar a y b de modo que la siguiente función sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & \text{para } \quad x < 0 \\ \text{sen } (b+x) & \quad " \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\pi}{x} & \quad " \quad x > \pi \end{cases}$$

(Univ. de la Laguna – Tenerife)

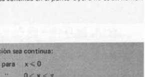
Sólo hay problema de continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$, en los que cambia la forma de la función, pues en los demás puntos la función está definida por expresiones polinómicas, trigonométricas y racionales.

La función será continua en $x = 0$ si: $\lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(0+h) = \lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(0-h) = f(0)$:

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(0+h) = \lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} \text{sen } (b+h) = \text{sen } b$$

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(0-h) = \lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} a(-h-1)^2 = a$$

$$f(0) = a(0-1)^2 = a$$



La función será continua en $x = 0$ si: $\text{sen } b = a \quad (1)$

La función será continua en $x = \pi$ si: $\lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(\pi + h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(\pi - h) = f(\pi)$.

$$\lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(\pi + h) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{\pi}{\pi + h} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$\lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(\pi - h) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \operatorname{sen}[b + (\pi - h)] = \operatorname{sen}(b + \pi)$$

$$f(\pi) = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

La función será continua en $x = \pi$ si: $\operatorname{sen}(b + \pi) = 1 \Rightarrow b + \pi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{b = (2k - 1)\pi + \frac{\pi}{2}}$$

Llevando este valor a (1): $a = \operatorname{sen}\left((2k-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

5.12 Estudiar en el campo real la continuidad de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x + 1} & \text{para } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{"} \quad x > 0 \end{cases}$$

(Univ. de Málaga)

$\forall a < 0$: $\lim\limits_{h \to o} f(a + h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} \dfrac{e^{a+h}}{e^{a+h} + 1} = \dfrac{e^a}{e^a + 1} = f(a) \Rightarrow$ la función es continua.

$\forall a < 0$: $\lim\limits_{h \to o} f(a + h) = \lim\limits_{h \to o} [(a+h)^2 + 1] = a^2 + 1 = f(a) \Rightarrow$ la función es continua.

Estudio de la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0 - h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} \dfrac{e^{o-h}}{e^{o-h} + 1} = \dfrac{e^o}{e^o + 1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0 + h) = \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} [(0+h)^2 + 1] = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0 - h) \neq \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(0 + h)$$

la función no es continua en $x = 0$.

De todo lo anterior resulta que la función es continua en el conjunto $R - \{0\}$

5.13 Determinar los números reales a y b, para que la función f definida en R por:

$$f(x) = a e^{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}} + b \cos x, \quad \text{si } x < 0,$$

$$f(0) = 6,$$

$$f(x) = 3a \frac{\operatorname{sen} x}{x} + b(x - 1), \quad \text{si } x > 0,$$

se continua en toda la recta real.

(Univ. Valladolid, 1991)

Hay problema de continuidad en $x = 0$, pues las expresiones $\frac{\text{sen}^2 x}{x}$ y $\frac{\text{sen}\, x}{x}$ no existen para $x = 0$.

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0-h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \left(a\, e^{\frac{\text{sen}^2 (0-h)}{0-h}} + b \cos(0-h) \right) = a\, e^{\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \text{sen}(-h) \cdot \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\text{sen}(-h)}{-h}} +$$

$$+ \, b \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \cos(-h) = a\, e^{0 \cdot 1} + b \cdot 1 = a\, e^{0} + b = a + b$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0+h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \left(3a \frac{\text{sen}(0+h)}{0+h} + b(0+h-1) \right) = 3a \cdot 1 + b(-1) = 3a - b$$

La función será continua en $x = 0$ si se verifica:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0-h) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(0+h) = f(0) \Rightarrow a + b = 3a - b = 6 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a + b = 6 \\ 3a - b = 6 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$4a = 12, \quad \boxed{a = 3} \quad ; \quad b = 6 - a = 6 - 3 = 3 \quad ; \quad \boxed{b = 3}$$

5.14 Usando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación

$$x^3 + x - 5 = 0$$

tiene al menos una solución x_o tal que $1 < x_o < 2$.

(Univ. de Barcelona)

La función $f: [1,2] \to R$ definida por $f(x) = x^3 + x - 5$ es continua, ya que es una función polinómica.

$$f(1) = 1 + 1 - 5 = -3 < 0$$

$$f(2) = 8 + 2 - 5 = \quad 5 > 0$$

Si la función f es continua en el intervalo $[1,2]$ y $f(1) \cdot f(2) < 0$, el teorema de Bolzano nos dice que existe al menos un número real $x_o \in]1,2[$ tal que $f(x_o) = 0$, o lo que es lo mismo, existe al menos una raiz x_o de la ecuación $x^3 + x - 5 = 0$ tal que $1 < x_o > 2$.

5.15 ¿Se puede afirmar que la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$ corta al eje de abscisas en al menos un punto del intervalo $]-1,0[$? ¿Y del $]1,0[$?

(Univ. de León)

$$f(-1) = -1 + 1 - 7(-1) + 1 = 8 \; ; \quad f(0) = 1 \; ; \quad f(1) = 1 + 1 - 7 + 1 = -4$$

La función, por ser polinómica, es continua en el intervalo $[0,1]$, siendo además $f(0) \cdot f(1) < 0$. El teorema de Bolzano nos dice que existe al menos un punto $c \in]0,1[$ tal que $f(c) = 0$. Esto implica que la gráfica de la función corta al eje de abscisas al menos en un punto del intervalo $]0,1[$.

No se puede afirmar que la gráfica corte al eje de abscisas en un punto del intervalo $]-1,0[$, pues aunque la función es continua en $[-1,0]$, no se verifica que $f(-1) \cdot f(0) < 0$.

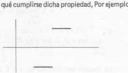
5.16 ¿Puede existir una función f, acotada en $[1,3]$, con $f(1) < 0$, $f(3) > 0$, y tal que no exista $c \in]1,3[$ con $f(c) = 0$?

(Univ. de León)

Si la función f es continua en el intervalo $[1,3]$, al ser $f(1) < 0$ y $f(3) > 0$, existirá al menos un $c \in (1,3)$ tal que $f(c) = 0$. (Teorema de Bolzano).

Si la función f no es continua en $[1,3]$, no tiene por qué cumplirse dicha propiedad, Por ejemplo, la función $f: [1,3] \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ 1 & \text{si} \quad x \in]2,3] \end{cases}$$



no es continua en $x = 2$.

No existe $c \in]1,3[$ tal que $f(c) = 0$.

5.17 Sean F y G dos funciones continuas en $[a,b]$ y tales que $F(a) > G(a)$ y $G(b) > F(b)$. Demostrar que sus gráficas se cortan.

(Univ. de Cantabria) y (Univ. de Murcia)

Si las funciones F y G son continuas en el intervalo $[a,b]$, la función $E = F - G$ es continua en $[a,b]$.

$$F(a) > G(a) \Rightarrow E(a) = F(a) - G(a) > 0 \quad ; \quad G(b) > F(b) \Rightarrow E(b) = F(b) - G(b) < 0$$

Si la función $E = F - G$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y verifica que $E(a) > 0$ y $E(b) < 0$, existe al menos un punto $t \in]a,b[$ en el que $E(t) = 0$, o sea:

$$\exists t \in]a,b[\;\; / \;\; E(t) = F(t) - G(t) = 0 \Rightarrow F(t) = G(t)$$

Esto implica que las gráficas de las dos funciones se cortan al menos en un punto $t \in]a,b[$.

5.18 Probar que las gráficas de $f(x) = \log x$ y $g(x) = e^{-x}$ (log = logaritmo neperiano) se cortan en algún punto y localizarlo aproximadamente.

(Univ. Castilla – La Mancha, 1991)

La función f es continua para $\forall x > 0$ y la función g para $\forall x \in R$.

Consideremos la función F definida por $F(x) = \log x - e^{-x}$:

$$F(1) = \log 1 - e^{-1} = 0 - \frac{1}{e} < 0 ; \quad F(e) = \log e - e^{-e} = 1 - \frac{1}{e^{e}} > 0$$

siendo F continua en el intervalo $[1,e]$.

Según el teorema de Bolzano, existe $a \in]1,e[$ tal que $F(a) = 0$.

$$F(a) = 0 \Rightarrow \log a - e^{-a} = 0 \Rightarrow \log a = e^{-a} \Rightarrow$$

las gráficas de $f(x) = \log x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en un punto del intervalo abierto $]1,e[$.

CAPITULO 6

DERIVADAS

DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO.

Sea la función f definida en un entorno de x_o.

Se llama incremento de la función f en el punto x_o a:

$$\Delta y_o = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$$

La función f es **derivable** en el punto x_o si existe el límite de $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ cuando x tiende a x_o.

Si la función f es derivable en el punto x_o, al límite anterior se llama **derivada** de la función f en el punto x_o. Se simboliza por $f'(x_o)$, o por $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_{x_o}$, o por $Df(x_o)$:

$$\boxed{f'(x_o) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_o} = Df(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}}$$

Si $x = x_o + \Delta x_o$, la derivada de f en el punto x_o se puede expresar así:

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{\Delta x_o \to o} \frac{f(x_o + \Delta x_o) - f(x_o)}{\Delta x_o}}$$

Para facilitar la escritura haremos $\Delta x_o = h$, con lo que tendremos:

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{h \to o} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}}$$

Hallemos la derivada de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ en el punto $x_o = a$:

$$f'(a) = \lim_{h \to o} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to o} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to o} (2a + h) = 2a$$

La función f es **derivable por la derecha** (respectivamente **por la izquierda**) si existe el límite por la derecha (resp. por la izquierda) de $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ cuando x tiende a x_o. La derivada por la derecha la simbolizaremos por $f'(x_o^+)$ y la derivada por la izquierda por $f'(x_o^-)$, o bien por $f'(x_o)^+$ y $f'(x_o)^-$:

$$\boxed{f'(x_o^+) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}}$$

$$\boxed{f'(x_o^-) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{f(x_o - h) - f(x_o)}{-h}}$$

Para que la función f sea derivable en x_o, es necesario y suficiente que f sea derivable por la derecha y por la izquierda en x_o y que $f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$. Se tendrá en este caso que $f'(x_o) = f'(x_o^+) = f'(x_o^-)$.

Veamos si es derivable en los puntos 0 y -1 la función $f: R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{para } x \geqslant 0 \\ x^2 & \text{"} \quad 0 > x > -1 \\ -2x-1 & \text{"} \quad -1 \geqslant x \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{\operatorname{sen} h - \operatorname{sen} 0}{h} = \lim_{h \to o} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = \lim_{h \to o} \frac{h}{h} = 1 \\ f'(0^-) &= \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{(-h)^2 - \operatorname{sen} 0}{-h} = \lim_{h \to o} \frac{h^2}{-h} = \lim_{h \to o} (-h) = 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$f'(0^+) \neq f'(0^-) \Rightarrow$ la función f no es derivable en 0.

$$f'(-1^+) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{(-1+h)^2 - [-2(-1)-1]}{h} = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{1-2h+h^2-1}{h} = \lim_{h \to o} (-2+h) = -2$$

$$f'(-1^-) = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{f(-1-h) - f(-1)}{-h} = \lim_{\substack{h \to o \\ h > o}} \frac{[-2(-1-h)-1] - [-2(-1)-1]}{-h} = \lim_{h \to o} \frac{2h}{-h} = -2$$

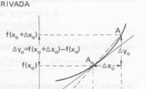
$f'(-1^+) = f'(-1^-) \Rightarrow$ la función es derivable en -1, siendo $f'(-1) = -2$.

Si la función f es derivable en el punto x_o es continua en dicho punto. El recíproco no es cierto, la función f puede ser continua en un punto x_o y no ser derivable en él.

La función del último ejemplo es continua en el punto 0 y no es derivable en dicho punto.

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

Sea (C) la curva de la función f respecto de un sistema de referencia ortonormal.



La tangente en A_o es la posición límite (si existe) de la secante A_oA cuando el punto A tiende hacia A_o sobre la curva (C).

Cuando A tiende hacia A_o sobre la curva (C), x tiende hacia x_o, y el ángulo ω que forma la recte A_oA con el eje OX tiende hacia el ángulo α que forma la tangente en A_o con el eje OX.

$$\lim_{\Delta x_o \to o} \operatorname{tg} \omega = \lim_{\Delta x_o \to o} \frac{f(x_o + \Delta x_o) - f(x_o)}{\Delta x_o} = f'(x_o) = \operatorname{tg} \alpha$$

o sea que la derivada de la función f en el punto x_o es igual al coeficiente angular de la tangente a la curva de f en el punto $A(x_o, f(x_o))$. La ecuación de dicha tangente es:

$$\boxed{y - f(x_o) = f'(x_o) \cdot (x - x_o)}$$

Cálculo de la ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 + 3x^2 - 6$ en el punto de abscisa $x = 2$:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \ ; \quad f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = 24 \ ; \quad f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 = 12$$

de donde, la ecuación de la tangente es: $y - 12 = 24\,(x - 2)$

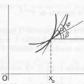
El ángulo bajo el que se cortan dos curvas es igual al ángulo que forman sus tangentes en el punto de corte.

Sean las curvas de ecuaciones

$$y = f(x) \quad ; \quad y = g(x)$$

y x_o la abscisa de su punto de corte:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{f'(x_o) - g'(x_o)}{1 + f'(x_o) \cdot g'(x_o)}$$



Cálculo del ángulo bajo el que se cortan las curvas de ecuaciones:

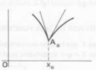
$$y = x^2 - 5x + 6 \ ; \quad y = x^2 - x - 2$$

Abscisa del punto de corte: $x^2 - 5x + 6 = x^2 - x - 2 \ ; \quad 8 = 4x \ ; \quad x = 2$

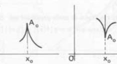
$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x - 5 \ ; \quad f'(2) = 4 - 5 = -1 \\ g'(x) = 2x - 1 \ ; \quad g'(2) = 4 - 1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{-1-3}{1+(-1)\cdot 3} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow \varphi = \operatorname{arc\,tg} 2$$

Las definiciones de derivadas por la derecha y por la izquierda tienen una interpretación geométrica en las semirrectas tangentes a la curva (C) de la función en el punto $A_o(x_o, y_o)$:

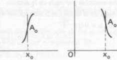
— las derivadas por la derecha y por la izquierda en x_o no son iguales: $f'(x_o^+) \neq f'(x_o^-)$. La curva (C) de la función admite dos semitangentes y el punto A_o es un *punto anguloso.*



— si $f'(x_o^+) = +\infty$ y $f'(x_o^-) = -\infty$ (o bien $f'(x_o^+) = -\infty$ y $f'(x_o^-) = +\infty$), las semitangentes coinciden y son verticales. El punto A_o es un punto *cuspidal* o *de retroceso.*



— si $f'(x_o^+) = f'(x_o^-) = +\infty$ (o bien $f'(x_o^+) = f'(x_o^-) = -\infty$), el punto A_o es un punto de inflexión con tangente vertical.



FUNCION DERIVADA.

Sea la función $f: D \to R$, y sea $E \subset D$ el conjunto de todos los puntos de D en los que la función f es derivable. Se llama **función derivada** de f a la función $f': E \to R$ que hace corresponder a cada punto $x_o \in E$ el número real $f'(x_o)$, valor de la derivada de f en el punto x_o.

La función $f:]a,b[\to R$ es una *función derivable* en $]a,b[$ si es derivable en todo punto $x_o \in]a,b[$.

La función $f: [a,b] \to R$ es una *función derivable* en $[a,b]$ si es derivable en todo punto $x_o \in]a,b[$, derivable por la derecha en a y derivable por la izquierda en b.

Si f' es derivable en $F \subset E$, se llama **derivada segunda** de f, y se simboliza por f'' o $\dfrac{d^2f}{dx^2}$, la derivada de f'. Más general, se llama **derivada** $n^{-\text{sima}}$ (o derivada de orden n) de f, y se simboliza por $f^{(n}$ o $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ la derivada de $f^{(n-1}$.

Se dice que la función f es una *función de clase* C^n en un intervalo I si f admite en I una derivada de orden n. La función f es una *función de clase* C^∞ en el intervalo I si f tiene en I derivadas de todos los órdenes. La función f es una *función de clase* C^o en el intervalo I si f es continua en I.

La función $f: [0,1] \to R$ definida por $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ es de clase C^1, ya que $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ existe para todo $x \in [0,1]$, pero $f''(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$ no existe para $0 \in [0,1]$.

La función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ es de clase C^∞.

Derivada de la suma, producto y cociente de funciones:

$$(f+g+\cdots+j)' = f'+g'+\cdots+j'$$

$$(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$$

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad ; \quad (f\cdot g\cdot h)' = f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}\text{, para todo } x \text{ que no anule el denominador}$$

DERIVADA DE UNA FUNCION COMPUESTA:

Sea f una función derivable en el intervalo I y g una función derivable en $f(I)$. La función compuesta $F = g \circ f$ es derivable en el intervalo I, verificándose $\forall x_o \in I$:

$$\boxed{F'(x_o) = (g\circ f)'(x_o) = g'[f(x_o)]\cdot f'(x_o)}$$

Este resultado se suele presentar así: Si las funciones f y g están expresadas por $y = f(x)$; $z = g(y)$, se tiene que $z = g[f(x)] = (g\circ f)(x)$:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

expresión conocida por *regla de la cadena.*

La regla de la cadena se puede aplicar al uso de más de dos funciones, por ejemplo, si $y = f(x)$, $z = g(y)$ y $u = h(z)$:

$$\boxed{\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

Sea $f:\ R \to R$ definida por $y = f(x) = \operatorname{sen} x$, y $g:\ [-1, 1] \to R$ definida por $g(y) = y^2$:

$$(g \circ f)\ (x) = g'\,[f(x)] \cdot f'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = 2y \cdot \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

Por la regla de la cadena habría que interpretarlo así:

$$y = \operatorname{sen} x\,,\quad z = y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2y \cdot \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

FUNCION DIFERENCIABLE EN UN PUNTO.

La función f definida en un entorno de x_o se dice que es **diferenciable** en x_o, si existe una función $\epsilon:\ h \mapsto \epsilon(h)$ tal que $\lim\limits_{h \to o} \epsilon(h) = 0$, y un número real A, independiente de h, que verifican la igualdad:

$$\boxed{f(x_o + h) - f(x_o) = A \cdot h + \epsilon(h) \cdot h} \qquad (1)$$

Veamos si la función $f:\ R \to R$ definida por $f(x) = x^3 - 3x + 2$ es diferenciable en $x_o = 5$.

$$f(5+h) - f(5) = [(5+h)^3 - 3(5+h) + 2] - (5^3 - 3 \cdot 5 + 2) = 5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot h + 3 \cdot 5 \cdot h^2 + h^3 - 15 - 3h + 2 - 112 =$$
$$= 72 \cdot h + (h^2 + 15\,h) \cdot h$$

identificando este resultado con (1) resulta: $A = 72$, $\epsilon(h) = h^2 + 15h$, siendo $\lim\limits_{h \to o} \epsilon(h) = \lim\limits_{h \to o} (h^2 + 15\,h) = 0$.

La función es diferenciable en $x_o = 5$.

La función f es diferenciable en x_o si y solo si f es derivable en x_o, verificándose que $A = f'(x_o)$.

La aplicación lineal definida por: $h \mapsto f'(x_o) \cdot h$ se llama **diferencial de la función f en x_o**. Se simboliza por:

$$\boxed{df_{x_o} = f'(x_o) \cdot dx}$$

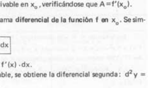
o bien, si la función f está definida por $y = f(x)$: $dy = f'(x) \cdot dx$.

Si la diferencial primera, $dy = f'(x) \cdot dx$, es diferenciable, se obtiene la diferencial segunda: $d^2 y = f''(x) \cdot (dx)^2 = f''(x) \cdot dx^2$, y así sucesivamente.

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL.

Sea (C) la curva de la función f respecto de un sistema de referencia ortonormal.

Sea la recta A_oC la tangente a la curva en el punto de abscisa x_o. En el triángulo A_oBC:



$$A_oB = \Delta x_o = dx\ ;\quad \operatorname{tg} \alpha = f'(x_o) = \frac{BC}{A_oB} = \frac{BC}{dx} \Rightarrow$$

$$BC = f'(x_o) \cdot dx \Rightarrow BC = dy$$

La diferencial de la función es igual al incremento (positivo o negativo) de la ordenada de la tangente a la curva en el punto de abscisa x_o, al pasar del punto de abscisa x_o al punto de abscisa $x_o + \Delta x_o$. En la figura igual al segmento BC.

El incremento de la función, Δy, es igual a la diferencia de las ordenadas de los puntos de abscisas x_o y $x_o + \Delta x_o$; $\Delta y = f(x_o + \Delta x_o) - f(x_o)$. En la figura, igual al segmento BA.

Cuando Δx es pequeño se puede considerar que $\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx$.

Sea calcular el valor aproximado de $\sqrt{65}$.

Considerando la función definida por $y = \sqrt{x}$:

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} \approx \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

haciendo $x = 64$ y $dx = \Delta x = 1$: $\sqrt{65} = \sqrt{64+1} \approx \sqrt{64} + \frac{1}{2\sqrt{64}} \cdot 1 = 8 + \frac{1}{2 \cdot 8} = 8{,}06$

Se tiene una esfera de 0,5 metros de radio y se le quiere dar un baño de oro de 0,1 milímetro de espesor. ¿Qué volumen de oro se necesita?

Considerando la fórmula del volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad V' = \frac{4}{3}\pi 3R^2 = 4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta V \approx 4\pi R^2 dx$$

haciendo $R = 500$ milímetros y $dx = 0{,}1$ milímetros:

$$\Delta V \approx 4\pi 500^2 \cdot 0{,}1 = 314160 \text{ mm}^3$$

DERIVADA DE LA FUNCION RECIPROCA.

Sea f una función continua estrictamente creciente o decreciente en el intervalo I, y sea f^{-1} la función recíproca de f. Si f es derivable en el punto a de I, y $f'(a) \neq 0$, la función f^{-1} es derivable en el punto $b = f(a)$, y se verifica:

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]}}$$

Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 5$, que es estrictamente creciente en R ya que $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 > 0$ para todo x real por tener sus raíces imaginarias y ser positivo el coeficiente de x^2. Para hallar $(f^{-1})'(5)$ tendremos que hallar el valor de x tal que $f(x) = 5$:

$x^3 - x^2 + 2x + 5 = 5 \Rightarrow x^3 - x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$, única solución ral, o sea que $f^{-1}(5) = 0$.

Aplicando la fórmula: $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'[f^{-1}(5)]} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

Si la función f es derivable en el intervalo I y se verifica que $f'(y) \neq 0$ para todo $y \in I$, la función reciproca f^{-1} es derivable en f(I), y se verifica:

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}}$$

Utilizando la notación diferencial, esta propiedad se escribe así:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

La función definida por $y = \text{arc sen } x$, para $x \in]-1, 1[$ equivale a la función $x = \text{sen } y$, para $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

y como para $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\cos y > 0$, de $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$: $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La función definida por $y = \operatorname{arc\,tg} x$, para $x \in]-\infty, +\infty[$ equivale a la función $x = \operatorname{tg} y$, para $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

FORMULA DE LEIBNIZ. Si las funciones f y g admiten derivada n–sima, se tiene:

$$\boxed{(f \cdot g)^{(n} = f^{(n} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1} \cdot g' + \binom{n}{2} f^{(n-2} \cdot g'' + \cdots + \binom{n}{n-1} f' \cdot g^{(n-1} + f \cdot g^{(n}}$$

Sea la función $x \mapsto e^{2x} \cdot x^2$. Haciendo $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = x^2$:

$$f'(x) = e^{2x} \cdot 2\ ;\quad f''(x) = e^{2x} \cdot 2^2, \ldots, f^{(n}(x) = e^{2x} \cdot 2^n\ ;\quad g'(x) = 2x\ ;\quad g''(x) = 2\ ;\quad g'''(x) = \cdots = g^{(n}(x) = 0$$

de donde: $(e^{2x} \cdot x^2)^{(n} = (e^{2x} \cdot 2^n) x^2 + \binom{n}{1} (e^{2x} \cdot 2^{n-1}) 2x + \binom{n}{2} (e^{2x} \cdot 2^{n-2}) \cdot 2 = e^{2x} \left(2^n x^2 + 2^n nx + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-1}\right)$

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES PRINCIPALES

FUNCION	DERIVADA	EJEMPLOS	
$f(x) = [g(x)]^n$	$f'(x) = n \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$	$f(x) = (ax+b)^n$	$f'(x) = n(ax+b)^{n-1} \cdot a$
		$f(x) = \sqrt[n]{(ax+b)^m} = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$	$f'(x) = \frac{m}{n} (ax+b)^{\frac{m}{n}-1} \cdot a$
		$f(x) = \sqrt{ax+b}$	$f'(x) = \frac{1}{2} (ax+b)^{\frac{1}{2}-1} \cdot a = \frac{1}{2} (ax+b)^{-\frac{1}{2}} \cdot a = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
$f(x) = \log g(x)$	$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$	$f(x) = \log (ax+b)$	$f'(x) = \frac{a}{ax+b}$
		$f(x) = \log (ax+b)^n = n \cdot \log (ax+b)$	$f'(x) = n \cdot \frac{a}{ax+b}$
$f(x) = \log_a g(x)$	$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{\log a} \cdot g'(x)$	$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$	$f(x) = e^{ax+b}$	$f'(x) = e^{ax+b} \cdot a$
		$f(x) = e^{\sqrt{x}}$	$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = a^{g(x)} (\log a) \cdot g'(x)$	$f(x) = a^{bx+c}$	$f'(x) = a^{bx+c} (\log a) \cdot b$
$f(x) = \operatorname{sen} g(x)$	$f'(x) = \cos g(x) \cdot g'(x)$	$f(x) = \operatorname{sen} (ax+b)$ $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}$	$f'(x) = \cos (ax+b) \cdot a$ $f'(x) = \cos \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos g(x)$	$f'(x) = - \operatorname{sen} g(x) \cdot g'(x)$	$f(x) = \cos (ax+b)$	$f'(x) = - \operatorname{sen} (ax+b) \cdot a$
$f(x) = \operatorname{tg} g(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 g(x)} \cdot g'(x) =$ $= [1+\operatorname{tg}^2 g(x)] \cdot g'(x)$	$f(x) = \operatorname{tg} (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 (ax+b)} \cdot a$ $= [1+\operatorname{tg}^2 (ax+b)] \cdot a$
$f(x) = \operatorname{ctg} g(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 g(x)} \cdot g'(x) =$ $= -[1+\operatorname{ctg}^2 g(x)] \cdot g'(x)$	$f(x) = \operatorname{ctg} (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 (ax+b)} \cdot a =$ $= -[1+\operatorname{ctg}^2 (ax+b)] \cdot a$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen} g(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-[g(x)]^2}} \cdot g'(x)$	$f(x) = \operatorname{arc\,sen} (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}} \cdot a$
$f(x) = \operatorname{arc\,cos} g(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-[g(x)]^2}} \cdot g'(x)$	$f(x) = \operatorname{arc\,cos} (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}} \cdot a$
$f(x) = \operatorname{arc\,tg} g(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+[g(x)]^2} \cdot g'(x)$	$f(x) = \operatorname{arc\,tg} (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+(ax+b)^2} \cdot a$
$f(x) = \operatorname{arc\,ctg} g(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1+[g(x)]^2} \cdot g'(x)$	$f(x) = \operatorname{arc\,ctg} (ax+b)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{1+(ax+b)^2} \cdot a$

PROBLEMAS

6.1 A partir de la definición de derivada, calcular la de la función $f(x) = 3x$ en el punto $x = 1$.

(Univ. de Barcelona)

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h) - 3 \cdot 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \boxed{3}$$

6.2 Encontrar, utilizando sólo la definición de derivada, la derivada de

$$f(x) = \sqrt{x-5}$$

en $x = 9$.

(Univ. de Murcia, 1991)

$$f'(9) = \lim_{h \to 0} \frac{f(9+h) - f(9)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(9+h)-5} - \sqrt{9-5}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{(4+h) - 2^2}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2} = \frac{1}{2+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

6.3 Calcular la derivada, a la izquierda y a la derecha del origen, de

$$f(x) = \sqrt{x^2(1+x)}$$

(Univ. de Cantabria)

$$f'(0)^+ = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\sqrt{h^2(1+h)} - 0}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h\sqrt{1+h}}{h} = \lim_{h \to 0} \sqrt{1+h} = 1$$

$$f'(0)^- = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\sqrt{(-h)^2(1-h)}}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\sqrt{h^2(1-h)}}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h\sqrt{1-h}}{-h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1-h}}{-1} = -1$$

6.4 Se considera la función f, definida en R, por:

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \text{ si } x \neq 0,$$

$$f(0) = 0.$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la citada función en $x = 0$.

(Univ. de Madrid, 1991)

Estudio de la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0+h) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{0+h}{1 + e^{\frac{1}{0+h}}} = \left(\dfrac{0}{1+e^{+\infty}}\right) = 0 \\ \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0-h) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{0-h}{1 + e^{\frac{1}{0-h}}} = \left(\dfrac{0}{1+e^{-\infty}} = \dfrac{0}{1+\dfrac{1}{e^{+\infty}}} = \dfrac{0}{1+0}\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0-h) = f(0) \Rightarrow \text{ la función es continua en } x = 0$$

Estudio de la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0)^{+} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\dfrac{0+h}{1+e^{\frac{1}{0+h}}} - 0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}} = \left(\frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{1+\infty}\right) = 0$$

$$f'(0)^{-} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\dfrac{0-h}{1+e^{\frac{1}{0-h}}} - 0}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{-h}}} = \left(\frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{e^{+\infty}}} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{1+0}\right) = 1$$

$f'(0)^{+} \neq f'(0)^{-} \Rightarrow$ la función no es derivable en $x = 0$.

6.5 Sea k un número real y f una función real definida sobre R mediante

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} + kx, \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Calcular la derivada en el punto $x = 0$.
b) Calcular la función derivada.
c) ¿Es continua la función $f'(x)$ en $x = 0$?

(Univ. de Cádiz)

a) Aplicando la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h} + kh - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h} + k\right) = \lim_{h\to 0}\left(h\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right) + k$$

como $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right| \leq 1$, y $h \to 0$, el producto de una función acotada por otra que tiende a 0 es 0, es decir: $\lim_{h\to 0}\left(h\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right) = 0$, de donde: $\boxed{f'(0) = k}$

b) Para $x \neq 0$: $f'(x) = 2x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\frac{-1}{x^2} + k = 2x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + k$

de donde:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + k & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

c) $\lim_{h\to 0} f'(0+h) = \lim_{h\to 0}\left(2h\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h} - \cos\frac{1}{h} + k\right) = \lim_{h\to 0}\left(2h\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{h}\right) - \lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{h} + k =$

$$= 0 - \lim \cos\frac{1}{h} + k$$

Si consideramos, por ejemplo, que h toma los valores de la sucesión $\frac{1}{2n\pi + a}$, siendo n un número natural y $0 \leq a \leq 2\pi$:

$$\lim_{h\to 0} \cos\frac{1}{h} = \lim_{n\to +\infty} \cos(2n\pi + a) = \cos a$$

y según sea el valor de a, cos a oscilará entre -1 y 1, lo que nos dice que no existe el $\lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{h}$, y por tanto tampoco existe el $\lim_{h\to 0} f'(0+h)$. La función f' no es continua en $x = 0$.

6.6 Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} |3-x| & \text{si } x < 7 \\ ax + 4 & \text{si } 7 \leq x < 10 \end{cases}$$

Determinar:

a) El valor de a para que f sea continua en $x = 7$.
b) La gráfica de f.
c) Dominio y recorrido de f.
d) La derivada de f en $x = 7$ y $x = 9$.

(Univ. de Sevilla)

a) Considerando que

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{para los valores de } x \text{ que hacen } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{" " " " " " } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$3 - x = 0\ ;\ x = 3 \Rightarrow |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3 \\ -(x-3) = -x+3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

de donde:

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x < 3 \\ x-3 & \text{si} \quad 3 \leqslant x < 7 \\ ax+4 & \text{si} \quad 7 \leqslant x < 10 \end{cases}$$

La función será continua en $x = 7$ si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(7-h) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(7+h) = f(7)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(7-h) = \lim\limits_{h \to 0} [(7-h)-3] = 4 \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(7+h) = \lim\limits_{h \to 0} [a(7+h)+4] = 7a+4 \end{array}\right| \quad 7a+4 = 4 \;\Rightarrow\; a = 0$$

Con este resultado se tiene:

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x < 3 \\ x-3 & \text{si} \quad 3 \leqslant x < 7 \\ 4 & \text{si} \quad 7 \leqslant x < 10 \end{cases}$$

b) La gráfica de la función es:

c) La función está definida para $-\infty < x < 10$, el dominio de f es $]-\infty, 10[$.

De la gráfica se deduce que los valores de $f(x)$ varían de 0 a $+\infty$, o sea que el recorrido de f es $[0, +\infty[$.

d)
$$\left.\begin{array}{l} f'(7)^- = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(7-h)-f(7)}{-h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[(7-h)-3]-4}{-h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{-h} = 1 \\ f'(7)^+ = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{f(7+h)-f(7)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4-4}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

la función no es derivable en $x = 7$.

Como en un entorno de 9, suficientemente pequeño, la función es constante: $f'(9) = 0$.

6.7 Calcular $f'(x)$ siendo $f(x) = \dfrac{x^3}{\text{sen}^2 x}$

(Univ. de Navarra)

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot \text{sen}^2 x - x^3 \cdot 2\,\text{sen}\,x \cdot \cos x}{\text{sen}^4 x} = \frac{x^2(3\,\text{sen}^2 x - 2x\cos x)}{\text{sen}^3 x}$$

6.8 Calcular las derivadas de las funciones siguientes:

$$f(x) = \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad ; \quad g(x) = (1+x^4)^{\frac{1}{2}}$$

(Univ. de Barcelona)

$$f(x) = \left(\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\text{sen}\,\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}$$

$$g(x) = (1+x^4)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(1+x^4)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 4x^3 = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

6.9 Derivar y simplificar $f(x) = \text{arc tg}\,\frac{1+x}{1-x} - \text{arc tg}\,x$

(Univ. de Madrid)

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2+(1+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{2}{(1+x^2-2x)+(1+x^2+2x)} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{2(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

6.10 Derivar y simplificar $f(x) = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\text{arc sen}\,x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$

(Univ. País Vasco)

$$f'(x) = \frac{2x}{2}\,\text{arc sen}\,x + \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{4}\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{4}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\,\text{arc sen}\,x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(1-x^2)-\frac{x^2}{4}\right) = x\,\text{arc sen}\,x$$

6.11 Calcular la derivada de $f(x) = (\text{arc sen}\,x)^{\cos^2 x}$

(Univ. de Madrid)

Tomando logaritmos (neperianos): $\log f(x) = \cos^2 x\cdot\log(\text{arc sen}\,x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\cos x\,(-\text{sen}\,x)\cdot\log(\text{arc sen}\,x) + \cos^2 x\cdot\frac{1}{\text{arc sen}\,x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$f'(x) = (\text{arc sen}\,x)^{\cos^2 x}\left(-\text{sen}\,2x\cdot\log(\text{arc sen}\,x)\right) + \frac{\cos^2 x}{\text{arc sen}\,x\cdot\sqrt{1-x^2}}$$

6.12 a) Expresar que la variable y es directamente proporcional a la variable u, e inversamente proporcional al cuadrado de la variable x.

b) Si $u = \text{sen}^2 x$, calcular la derivada de y respecto a x en la fórmula obtenida en a).

(Univ. de Alicante)

a) $y = k \cdot \dfrac{u}{x^2}$ (k es un número real distinto de 0)

b) $$y = k\,\frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = k\left(\frac{\text{sen}\, x}{x}\right)^2 \Rightarrow y' = k \cdot 2\,\frac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \frac{(\cos x)\cdot x - (\text{sen}\, x)\cdot 1}{x^2} =$$

$$= 2k\,\frac{\text{sen}\, x\,(x\cos x - \text{sen}\, x)}{x^3}$$

6.13 Dada la función $$f(x) = \text{arc tg}\, x + \text{arc tg}\,\frac{1}{x}$$
comprobar que para cada $x \neq 0$ es $f'(x) = 0$. Calcular $f(1)$, $f(-1)$ y dibujar la gráfica.

(Univ. de Zaragoza)

La función no está definida en $x = 0$, y por tanto no existe la función derivada en $x = 0$.

Si $x \neq 0$: $$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$$

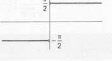
$$f(1) = \text{arc tg}\, 1 + \text{arc tg}\, 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\ ;\quad f(-1) = \text{arc tg}\,(-1) + \text{arc tg}\,(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

Para dibujar la gráfica no hemos de caer en el error de afirmar que puesto que $f'(x) = 0$, la función es constante en todos sus puntos, ya que $f'(x) = 0$ si $x \neq 0$. En $x = 0$ no existe f'.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\infty < x < 0 \\ \text{no existe para} & x = 0 \\ 0 & \text{para} \quad 0 < x < +\infty \end{cases} \ ; \qquad f(x) = \begin{cases} \text{constante para} & -\infty < x < 0 \\ \text{no está definida para} & x = 0 \\ \text{constante para} & 0 < x < +\infty \end{cases}$$

y como $f(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$ y $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$, resulta

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{para} \quad -\infty < x < 0 \\ \text{no existe para} & x = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{para} \quad 0 < x < +\infty \end{cases}$$



6.14 Dada la función f, definida por $f(x) = \log\sqrt{\dfrac{1+\text{sen}\, x}{1-\text{sen}\, x}}$, se pide:

1º) Determinar los valores de x para los que está definida.
2º) Hallar su derivada.

(Univ. de Madrid)

1º) $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$ no existirá para los valores de x que anulen el denominador, o sea para

$x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ (véase la representación gráfica de $y = \operatorname{sen} x$).

$\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$ no existirá para los valores de x que hagan $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} < 0$ o anulen el denominador. Como para todo valor real de x: $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$ es igual o mayor que 0, excepto para los valores de x que anulan el denominador. La raíz estudiada no exixte para $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

$\log\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$ no existirá para los valores de x que hagan $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} \leq 0$ o anulen el denominador. Para $x = (2k+1)\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen} x = -1$, $1 + \operatorname{sen} x = 0$, $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} = 0$, la función no está definida.

De todo lo anterior se deduce que la función f no está definida para $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

2º) $$f'(x) = \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}} \cdot \frac{\cos x\,(1-\operatorname{sen} x) - (-\cos x)\,(1+\operatorname{sen} x)}{(1-\operatorname{sen} x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} \cdot \frac{2\cos x}{(1-\operatorname{sen} x)^2} = \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)\,(1-\operatorname{sen} x)} = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}$$

6.15 Calcular $\Delta y - dy$ para la función $y = 2x^2 - \dfrac{x}{2}$ en $x = 2$, para $\Delta x = 0,3$.

(Univ. de León)

En $x = 2$, para $\Delta x = 0,3$, considerando que $y' = 4x - \dfrac{1}{2}$:

$$\Delta y = f(2+0,3) - f(2) = \left(2(2+0,3)^2 - \frac{2+0,3}{2}\right) - \left(2\cdot 2^2 - \frac{2}{2}\right) = 2(2,3)^2 - \frac{2,3}{2} - 7 =$$

$$= 10,58 - 1,15 - 7 = 2,43.$$

$$dy = f'(2)\cdot 0,3 = \left(4\cdot 2 - \frac{1}{2}\right)\cdot 0,3 = 7,5\cdot 0,3 = 2,25$$

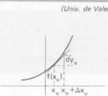
de donde $$\Delta y - dy = 2,43 - 2,25 = \boxed{0,18}$$

6.16 Utilizar la diferencial para obtener razonadamente un valor aproximado de $e^{0,007}$.

(Univ. de Valencia)

Sea f una función derivable en el punto x_o. Si se toma como valor aproximado de la función en un entorno de x_o el de la ordenada de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_o, f(x_o))$, este valor aproximado es $f(x_o) + dy_o$, siendo $dy_o = f'(x_o)\,dx_o$, o sea se considera que

$$f(x_o + \Delta x_o) = f(x_o) + f'(x_o)\,dx_o$$



Aplicación: Sea f la función definida por $f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $x_0=0$ y $\Delta x_0 = dx_0 = 0{,}007$:

$$f(0{,}007) = e^{0{,}007} = f(0) + f'(0)\,dx = e^0 + e^0 \cdot 0{,}007 = 1 + 1 \cdot 0{,}007 = \boxed{1{,}007}$$

6.17 Si es posible, poner un ejemplo de una función que en $x = a$ sea:
a) Continua y derivable.
b) Derivable y no continua.
c) Continua y no derivable.

(Univ. de León)

a) Las funciones polinómicas son continuas y derivables en todo punto de **R**, luego la función **f: R → R**, definida por

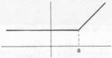
$$f(x) = 6x^3 - 4x^2 + x - 5$$

es continua y derivable en $x = a$, cualquiera que sea $a \in$ **R**.

b) Si una función no es continua en un punto, no es derivable.

c) La función **f: R → R** definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < a \\ x & \text{ " } x \geq a \end{cases}$$



es continua y no derivable en $x = a$.

6.18 Se bombea gas a un globlo esférico a razón de $6 m^3$/min. Si la presión se mantiene constante, ¿Cuál es la velocidad con la que cambia el radio del globo cuando el diámetro mide 120 cm.?
(Se recuerda que el volumen de la esfera de radio R es de $\frac{4}{3}\pi R^3$)

(Univ. de Madrid, 1991)

$6\ m^3/\text{min} = 6 \cdot (100)^3\ cm^3/\text{min.} = 6000000\ cm^3/\text{min.}$

Al cabo de t minutos, el volumen del globo será: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 6000000 \cdot t\ \ cm^3$

Derivando respecto del tiempo (considerando que R es función de t):

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 \frac{dR}{dt} = 6000000 \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{6000000}{4\pi R^2} \text{ cm/min.}$$

Cuando R = 60 cm: $\frac{dR}{dt} = \frac{6000000}{4\pi(60)^2} = 132{,}63$ cm/min.

6.19 Un observador se encuentra a 2000 metros de la torre de lanzamiento de un cohete. Cuando éste despega verticalmente mide la variación del ángulo $\phi(t)$ que forma la línea visual que le une con el cohete y la del suelo horizontal en función del tiempo transcurrido. Sabiendo que $\phi'(t) = 1/20$ radianes por segundo cuando $\phi = \pi/3$, se pide:
1. ¿Cuál es la altura del cohete cuando $\phi = \pi/3$ radianes?
2. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando $\phi = \pi/3$ radianes?

(Univ. de Madrid, 1991)

1. En el triángulo OAB: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{h}{2000} \Rightarrow$

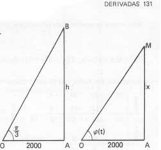
$$h = 2000 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = 2000\sqrt{3} = 3464'1 \text{ m}$$

2. En el triángulo OAM, sea x la altura alcanzada al cabo del tiempo t:

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{x}{2000} \Rightarrow x = 2000 \operatorname{tg} \varphi(t)$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = 2000 \frac{1}{\cos^2 \varphi(t)} \cdot \varphi'(t)$$



como $\varphi'(t) = \frac{1}{20}$ radianes por segundo cuando $\varphi = \frac{\pi}{3}$ radianes, la velocidad del cohete cuando $\varphi = \frac{\pi}{3}$ radianes es:

$$\frac{dx}{dt} = 2000 \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{20} = 2000 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{20} = 400 \text{ m/s.}$$

6.20 Probar que un número real a es raíz doble de una función polinómica f(x) si y sólo si a es raíz común de f(x) y f'(x).

Aplicarlo para resolver la ecuación

$$18x^3 - 33x^2 + 20x - 4 = 0$$

sabiendo que tiene una raíz doble.

(Univ. de Málaga)

– Si a es raíz doble de la fracción polinómica f(x) se tendrá:

$$f(x) = (x-a)^2 \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = 2(x-a) \cdot g(x) + (x-a)^2 \cdot g'(x) =$$

$$= (x-a)\,[\,2\,g(x) + (x-a) \cdot g'(x)\,] \Rightarrow a \text{ es raíz de } f'(x) = 0.$$

– Si f(x) y f'(x) tienen la raíz común a, se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= (x-a) \cdot h(x) \\ f'(x) &= (x-a) \cdot j(x) \end{aligned}\right|$$

siendo h(x) y j(x) polinomios.

Derivando la primera de estas igualdades: $f'(x) = 1 \cdot h(x) + (x-a) \cdot h'(x)$, y como por la segunda igualdad: $f'(x) = (x-a) \cdot j(x)$, resulta:

$$(x-a) \cdot j(x) = h(x) + (x-a) \cdot h'(x) \Rightarrow h(x) = (x-a) \cdot j(x) - (x-a) \cdot h'(x) = (x-a)[j(x) - h'(x)]$$

sustituyendo este valor en la primera igualdad:

$$f(x) = (x-a) \cdot (x-a)\,[\,j(x) - h'(x)\,] = (x-a)^2\,[\,j(x) - h'(x)\,] \Rightarrow f(x) = 0 \text{ tiene la raíz doble}$$

$x = a$.

Para resolver la ecuación dada sabiendo que tiene una raiz doble, se hallan la raices de su derivada:

$$54x^2-66x+20=0\ ;\ 27x^2-33x+10=0 \Rightarrow x=\frac{33\pm\sqrt{33^2-4\cdot 27\cdot 10}}{54}=\frac{33\pm 3}{54}= \left|\begin{array}{l}\frac{36}{54}=\frac{2}{3}\\[4pt] \frac{30}{54}=\frac{5}{9}\end{array}\right.$$

y se comprueba, por Rufini, cual de estas raices es raiz doble de la ecuación primitiva:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 18 & -33 & 20 & -4\\ \frac{2}{3} & & 12 & -14 & 4\\ \hline & 18 & -21 & 6 & \boxed{0}\\ \frac{2}{3} & & 12 & -6 & \\ \hline & 18 & -9 & \boxed{0} & \end{array} \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\frac{2}{3}\ \text{es raiz doble}\\[4pt] 18x-9=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ \text{es la tercera raiz}\end{array}\right.$$

6.21 Calcular la derivada de orden n de la función $f(x) = e^{2x}$.

(Univ. de Barcelona)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x}\\ f'(x) &= e^{2x}\cdot 2\\ f''(x) &= e^{2x}\cdot 2\cdot 2 = 2^2\cdot e^{2x}\end{aligned}$$

Por la forma de estas expresiones parece ser que

$$f^{(n}(x) = 2^n\cdot 2^{2x} \qquad (1)$$

La fórmula (1) se verifica para $n = 1$ y $n = 2$, suponiendo que se verifica para $n = h$:

$f^{(h}(x) = 2^h\cdot e^{2x}$, al derivar esta expresión se tiene que $f^{(h+1}(x) = 2^{h+1}\cdot e^{2x}$, que es la fórmula (1) para $n = h + 1$.

Está demostrado por el método de inducción que la fórmula (1) es verdadera.

6.22 Demostrar que todas las derivadas de orden par de la función f: R → R, definida por

$$f(x) = \text{sen } x\cdot\cos x$$

son nulas en $x = 0$.

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

Emplearemos las fórmulas: $\text{sen } 2x = 2\,\text{sen } x\cdot\cos x$ y $\cos x = \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{sen } x\cdot\cos x = \frac{1}{2}(2\,\text{sen } x\cdot\cos x) = \frac{1}{2}\,\text{sen } 2x\\ f'(x) &= \frac{1}{2}(\cos 2x)\cdot 2 = \cos 2x = \text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\\ f''(x) &= \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 = 2\,\text{sen}\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\ f'''(x) &= 2\cos\left(2x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 = 2^2\,\text{sen}\left(2x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\\ f^{IV}(x) &= 2^2\cos\left(2x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 = 2^3\,\text{sen}\left(2x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

de estos resultados parece ser que $f^{(n}(x) = 2^{n-1}\operatorname{sen}\left(2x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ (1)

fórmula que se cumple para $n = 1, 2, 3, 4$, derivando (1):

$$f^{(n+1}(x) = 2^{n-1}\cos\left(2x + n\,\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2 = 2^n\operatorname{sen}\left(2x + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right)$$

que es la fórmula (1) sustituyendo n por $n + 1$.

Está demostrado que la derivada de orden n está dada por la fórmula (1).

Para todo n par, $n = 2h$:

$$f^{(2h}(x) = 2^{2h-1}\operatorname{sen}\left(2x + 2h\,\frac{\pi}{2}\right) = 2^{2h-1}\operatorname{sen}(2x + h\pi) \Rightarrow$$

$$f^{(2h}(0) = 2^{2h-1}\operatorname{sen}(h\pi) = 2^{2h-1}\cdot 0 = 0$$

6.23 Sea la función $f\colon R - \{0\} \to R$ derivable tal que $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ para todo $x \neq 0$. Demostrar:

1º) La función f es derivable dos veces.

2º) Existen números reales a, b, c tales que

$$ax^2\cdot f''(x) + bx\cdot f'(x) + c\cdot f(x) = 0\,, \qquad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$$

(Univ. de Oviedo)

1º) Considerando la derivada de las funciones compuestas:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f''(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2} \\ \text{Como } f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \neq 0: \quad f'\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = f(x) \end{array}\right| \Rightarrow f''(x) = f(x)\cdot\frac{-1}{x^2} \quad \forall x \neq 0$$

lo que nos dice que f es derivable dos veces.

2º) De $f''(x) = \frac{-1}{x^2}\cdot f(x)$ se deduce que $\forall x \neq 0$: $x^2\cdot f''(x) + f(x) = 0 \Rightarrow$

$$1\cdot x^2\cdot f''(x) + 0\cdot f'(x) + 1\cdot f(x) = 0$$

de donde $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

6.24 Hallar un punto del intervalo $[0, 1]$ donde la tangente a la curva

$$y = 1 + x - x^2$$

sea paralela al eje de abscisas.

(Univ. de Cantabria)

La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (a, b) es: $y - b = f'(a)\cdot(x - a)$.

Si esta tangente es paralela al eje de abscisas se verificará que $f'(a) = 0$:

$$y' = 1 - 2x \Rightarrow f'(a) = 1 - 2a = 0\,;\; a = \frac{1}{2}, \text{ siendo } \frac{1}{2} \in [0, 1]$$

Para $a = \frac{1}{2}$: $y = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow$ el punto pedido es el $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

6.25 En qué punto de la curva $y = \log x$
la tangente es paralela a la cuerda que une los punto (1,0) y (e,1)?

(Univ. de Oviedo)

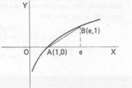
El coeficiente angular de la cuerda AB es:

$$\frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$

Si $M(a, \log a)$ es el punto pedido:

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow a = e-1$$

el punto pedido es $M(e-1, \log(e-1))$.



6.26 Obtener los puntos de la gráfica de:

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x + 4$$

en los que la recta tangente es paralela a:

$$y - 3x - 2 = 0$$

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

$$f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 26x + 3$$

Si el punto $M(a, b)$ es el pedido, se verificará que las rectas:

$$y - b = f'(a)(x - a) \; ; \quad y = 3x + 2$$

son paralelas, de donde:

$$4a^3 - 21a^2 + 26a + 3 = 3 \Rightarrow 4a^3 - 21a^2 + 26a = 0 \; ; \; (4a^2 - 21a + 26)a = 0 \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} a = 0 \\ 4a^2 - 21a + 26 = 0 \; ; \; a = \dfrac{21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 4 \cdot 26}}{2 \cdot 4} = \dfrac{21 \pm 5}{8} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{26}{8} = \dfrac{13}{4} \\ = 2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$f(0) = 4$;

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -7 & 13 & 3 & 4 \\ 2 & & 2 & -10 & 6 & 18 \\ \hline & 1 & -5 & 3 & 9 & \underline{22} \end{array} \Rightarrow f(2) = 22$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -7 & 13 & 3 & 4 \\ \frac{13}{4} & & \frac{13}{4} & -\frac{195}{16} & \frac{169}{64} & \frac{4693}{256} \\ \hline & 1 & -\frac{15}{4} & \frac{13}{16} & \frac{361}{64} & \frac{5717}{256} \end{array} \Rightarrow f\left(\frac{13}{4}\right) = \frac{5717}{256}$$

Los puntos $(0, 4)$, $(2, 22)$ y $\left(\frac{13}{4}, \frac{5717}{256}\right)$ son los pedidos.

6.27 Hallar los puntos en los que la tangente a la curva

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$$

es: a) paralela al eje OX.
b) paralela a la recta $y = 5x + 3$.
c) perpendicular a la recta $y = \frac{x}{3} + 1$.

(Univ. de Alicante)

Sea $M(a, b)$ un punto de la curva dada. La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (a, b) de la curva es:

$$y - b = f'(a) \cdot (x - a).$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1 \Rightarrow y' = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f'(a) = a^2 - 2a - 3 \Rightarrow$$

$$y - b = (a^2 - 2a - 3)(x - a) \qquad (1)$$

es la ecuación de la tangente a la curva dada en el punto $M(a, b)$. Verificándose, por estar M sobre la curva, que

$$b = \frac{a^3}{3} - a^2 - 3a + 1 \qquad (2)$$

a) Si la recta de ecuación (1) es paralela al eje OX, su coeficiente angular es 0:

$$a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

de (2) resulta que si $a = 3$, $b = -8$; y si $a = -1$, $b = \frac{8}{3}$. Llevando estos dos pares de valores a (1) obtenemos dos tangentes a la curva paralelas al eje OX:

$$\boxed{y + 8 = 0} \quad ; \quad \boxed{y - \frac{8}{3} = 0}$$

b) Si la recta de ecuación (1) es paralela a la recta $y = 5x + 3$, el coeficiente de ambas rectas es el mismo:

$$a^2 - 2a - 3 = 5 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

y como el punto M(a,b) está sobre la curva, se verifica la relación (2):

$$\text{para } a = 4;\ b = \frac{64}{3} - 16 - 12 + 1 = -\frac{17}{3};\ \text{para } a = -2:\ b = \frac{-8}{3} - 4 + 6 + 1 = \frac{1}{3}$$

de donde resultan las ecuaciones pedidas:

$$y + \frac{17}{5} = 5(x - 4), \quad \boxed{y = 5x - \frac{117}{5}} \quad ; \quad y - \frac{1}{3} = 5(x + 2), \quad \boxed{y = 5x + \frac{31}{3}}$$

c) Si dos rectas son perpendiculares, el producto de sus coeficientes angulares es igual a -1:

$$(a^2 - 2a - 3) \cdot \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = -3;\ a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 0,\ a = 2$$

obteniendo en (2) los valores correspondientes de b:

$$\text{para } a = 0: \; b = 1 \; ; \quad \text{para } a = 2: \; b = \frac{8}{3} - 4 - 6 + 1 = -\frac{19}{3}$$

y las rectas pedidas serán:

$$y - 1 = -3(x - 0), \quad \boxed{y = -3x + 1} \quad ; \quad y + \frac{19}{3} = -3(x - 2), \quad \boxed{y = -3x - \frac{1}{3}}$$

6.28 Hallar el punto de la curva $y = \log(1 + x^2)$ en el que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa $x = 1$.

(Univ. del País Vasco)

$$f(x) = \log(1 + x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x$$

Recordando que dos rectas $y = mx + b$, $y = m'x + b'$ son perpendiculares si y solo si

$$m' = \frac{-1}{m} \qquad \text{ó} \qquad mm' + 1 = 0,$$

si a es la abscisa de punto buscado:

$$f'(a) \cdot f'(1) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2a}{1 + a^2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{1 + 1^2} + 1 = 0 \Rightarrow 4a + 2(1 + a^2) = 0 \; ; \; a^2 + 2a + 1 = 0 ; a = -1.$$

$f(-1) = \log[1 + (-1)^2] = \log 2 \Rightarrow$ el punto pedido es el $(-1, \log 2)$.

6.29 Se da la curva $y = \dfrac{1}{x}$. Comprobar que el segmento de la tangente a dicha curva en el punto $\left(3, \frac{1}{3}\right)$, comprendido entre los ejes de coordenadas, está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto.

(Univ. de Madrid)

Considerando que la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_o, y_o) de la misma es $y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$ se tiene:

$y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{x^2}$ que particularizada para $x = 3$ vale $y' = \dfrac{-1}{9}$, de donde la ecuación de la tangente en el punto $\left(3, \frac{1}{3}\right)$ es:

$$y - \frac{1}{3} = \frac{-1}{9}(x - 3) \quad \left| \begin{array}{l} \text{para } x = 0: \quad y - \frac{1}{3} = \frac{-1}{9}(0 - 3) \; ; \quad y = \frac{2}{3} \\ \text{"} \quad y = 0: \quad 0 - \frac{1}{3} = \frac{-1}{9}(x - 3) \; ; \quad 3 = x - 3 \; ; \; x = 6 \end{array} \right.$$

los puntos de corte de la tangente con los ejes son $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y $(6, 0)$. El punto medio del segmento que tiene por extremos estos puntos es el que tiene por coordenadas la semisuma de las coordenadas de los extremos:

$$\left(\frac{0 + 6}{2}, \frac{\frac{2}{3} + 0}{2}\right) = \left(3, \frac{1}{3}\right)$$

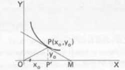
6.30 Si P es un punto cualquiera de la gráfica $y = \frac{1}{x}$, probar que el triángulo formado por la recta OP, la tangente a esa gráfica en el punto P y el eje $y = 0$ es isósceles. (O es el origen de coordenadas)

(Univ. de Madrid)

La ecuación de la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $P(x_o, y_o)$ de la gráfica es:

$$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow$$



la ecuación de la tangente a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ en el punto $P(x_o, y_o)$ es:

$$y - y_o = \frac{-1}{x_o^2}(x - x_o)$$

haciendo $y = 0$ obtendremos la abscisa del punto M de corte de la tangente con el eje OX:

$$0 - y_o = \frac{-1}{x_o^2}(x - x_o) \Rightarrow y_o x_o^2 = x - x_o \qquad (1)$$

por estar el punto $P(x_o, y_o)$ sobre la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ satisface su ecuación, o sea que $y_o = \frac{1}{x_o}$, llevando este valor a (1):

$$\frac{1}{x_o}x_o^2 = x - x_o \Rightarrow x_o = x - x_o \Rightarrow x = 2x_o \Rightarrow \text{las coordenadas del punto M son } (2x_o, 0).$$

La mediatriz del segmento OM es $x = x_o$, y como las coordenadas del punto P satisfacen esta ecuación, el punto P está sobre esta mediatriz, lo que nos dice que el triángulo OPM es isósceles.

6.31 Consideremos la parábola de ecuación $f(x) = x^2$. Razona si, cualesquiera que sean los números reales a y b, con $a < b$, siempre existe una recta paralela a la recta que pasa por los puntos (a, a^2), y (b, b^2), y que además sea tangente a la gráfica de la parábola en un punto (c, c^2), con $c \in]a, b[$. En caso afirmativo, escribe su ecuación.

(Univ. de Valencia, 1991)

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(a, a^2)$ y $B(b, b^2)$ es:

$$\frac{y - a^2}{b^2 - a^2} = \frac{x - a}{b - a} \Rightarrow y = \frac{b^2 - a^2}{b - a}(x - a) + a^2 \; ; \; y = (b + a)x - ab \qquad (1)$$

$f'(x) = 2x \Rightarrow$ la ecuación de la tangente a la parábola en el punto $C(c, c^2)$ es:

$$y - c^2 = 2c(x - c) \; ; \quad y = 2cx - c^2 \qquad (2)$$

Las rectas (1) y (2) serán paralelas si $2c = a + b$; $\boxed{c = \frac{a+b}{2}}$, llevando este valor a (2) resulta:

$$y = 2\,\frac{a+b}{2}\,x - \frac{(a+b)^2}{4} \; ; \quad \boxed{y = (a+b)x - \frac{(a+b)^2}{4}}$$

6.32 Demostrar que las curvas

$$e^x \cos y = e^a \cos b \qquad y \qquad e^x \operatorname{sen} y = e^a \operatorname{sen} b$$

se cortan ortogonalmente.

(Univ. de Sevilla)

Hallemos el punto de corte de ambas curvas. Dividiendo miembro a miembro sus ecuaciones:

$$\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} b \Rightarrow y = b$$

sustituyendo este valor en la primera ecuación:

$$e^x \cos b = e^a \cos b \Rightarrow x = a$$

Las curvas se cortan en el punto (a, b).

El ángulo α bajo el que se cortan las curvas $y = f(x)$, e $y = g(x)$ en el punto (a, b) está determinado por la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f'(a) - g'(a)}{1 + f'(a) \cdot g'(a)}$$

Derivando respecto de x las funciones implícitas de las curvas del enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} e^x \cdot \cos y + e^x(-\operatorname{sen} y) \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{\cos y}{\operatorname{sen} y} \Rightarrow f'(a) = \dfrac{\cos b}{\operatorname{sen} b} \\ e^x \cdot \operatorname{sen} y + e^x \cdot \cos y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \Rightarrow g'(a) = -\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dfrac{\cos b}{\operatorname{sen} b} - \left(-\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}\right)}{1 + \dfrac{\cos b}{\operatorname{sen} b}\left(-\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}\right)} = \frac{\operatorname{ctg} b + \operatorname{tg} b}{1 - 1} = \frac{\operatorname{ctg} b + \operatorname{tg} b}{0} = \infty \Rightarrow \alpha = 90^\circ \Rightarrow$$

las curvas se cortan ortogonalmente.

6.33 Calcular el ángulo que forman las curvas de ecuaciones:

$$xy = 1 \quad y \quad x^2 - y^2 = 1$$

(Univ. de Madrid)

Sea (a, b) un punto de corte de ambas curvas.

$$\left.\begin{array}{l} xy = 1 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 \cdot y + x \cdot y' = 0 \\ 2x - 2yy' = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y' = -\dfrac{y}{x} \\ y' = \dfrac{x}{y} \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(a) = -\dfrac{b}{a} \\ g'(a) = \dfrac{a}{b} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\dfrac{b}{a} - \dfrac{a}{b}}{1 + -\dfrac{b}{a}\dfrac{a}{b}} = \frac{-(b^2 + a^2)}{1 - 1} = \left(\frac{-(b^2 + a^2)}{0} = \infty\right) \Rightarrow \boxed{\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}}$$

6.34 Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de 1 millon de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (expresado en meses) viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 10^6 & 0 \leq t \leq 2 \\ 10^6 \cdot e^{t-2} & t > 2 \end{cases}$$

Se pide: a) Verificar que la población es función continua del tiempo.

b) Calcular la tasa de variación media de la población en los intervalos $[0, 2]$ y $[0, 4]$.

c) Calcular la tasa de variación media instantánea en $t = 4$, comparándola con la última tasa de variación media obtenida.

(Univ. de Alicante, 1991)

a) La función es constante en el intervalo $[0,2]$ y exponencial en el intervalo $]0, +\infty[$. Como las funciones constantes y las exponenciales son continuas, sólo hay duda de la función dada en el punto $x = 2$ en el que cambia la forma de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(2-h) = \lim\limits_{h \to o} 10^6 = 10^6 \\ \lim\limits_{\substack{h \to o \\ h > o}} f(2+h) = \lim\limits_{h \to o} (10^6 \cdot e^{(2+h)-2}) = 10^6 \\ f(2) = 10^6 \end{array}\right| \Rightarrow \text{ la función es continua en } x = 2.$$

b) $\dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{10^6 - 10^6}{2} = 0$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{10^6 \cdot e^{4-2} - 10^6}{4} = 10^6 \, \frac{e^2 - 1}{4} = 10^6 \cdot 1{,}5773$$

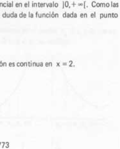
c) Para $t > 2$: $f'(t) = 10^6 \cdot e^{t-2}$ $\Rightarrow$ la tasa de variación instantánea en $t = 4$ es:

$$f'(4) = 10^6 \cdot e^{4-2} = 10^6 \cdot e^2 = 10^6 \cdot 7{,}3890$$

Representemos brevemente la función:

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < 2 \\ 10^6 \cdot 10^{t-2} & \text{para } t > 2 \end{cases}$$

$$f''(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < 2 \\ 10^6 \cdot 10^{t-2} & \text{para } t > 0 \end{cases}$$



En el intervalo $]2,4]$: $f''(t) > 0$, la función es convexa.

En el intervalo $[0, 2]$ la función es constante, la tasa de variación es nula. En el intervalo $[0, 4]$ la tasa de variación es igual al coeficiente angular de la recta AB, y la tasa de variación instantánea en $x =$ es igual al coeficiente angular de la tangente en $x = 4$, que por ser la función convexa en este punto, es mayor que el coeficiente angular del segmento AB que tiene su extremo en el punto B.

CAPITULO 7

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO MAXIMOS Y MINIMOS CONVEXIDAD

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCION.

La función f definida en el intervalo I es **estrictamente creciente** en el punto $x_o \in I$, si existe un entorno simétrico de centro x_o de radio δ, tal que para todo h, $0 < h < \delta$, se verifica:

$$\boxed{f(x_o - h) < f(x_o) < f(x_o + h)}$$

y es **estrictamente decreciente** si

$$\boxed{f(x_o - h) > f(x_o) > f(x_o + h)}$$

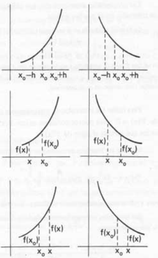
También se puede definir así: la función f es estrictamente creciente en x_o si existe un entorno E de x_o tal que para todo $x \in E$ se verifica:

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} > 0} \qquad (1)$$

y es estrictamente decreciente en x_o si

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} < 0} \qquad (2)$$

Si en las expresiones anteriores se sustituye el signo < por ⩽ y el > por ⩾, tendremos la definición de función creciente y decreciente en un punto.



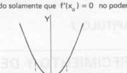
FUNCION CRECIENTE FUNCION DECRECIENTE

Si la función f es creciente en x_o, y existe $f'(x_o)$, se tendrá que $f'(x_o) \geqslant 0$, ya que de (1) se deduce que $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \geqslant 0$.

Si la función f es decreciente en x_o y existe $f'(x_o)$, se tendrá que $f'(x_o) \leqslant 0$, ya que de (2) se deduce que $f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \leqslant 0$.

Si la función f es derivable en x_o y es $f'(x_o) > 0$ la función es estrictamente creciente en x_o, y si $f'(x_o) < 0$ es estrictamente decreciente en x_o. Conociendo solamente que $f'(x_o) = 0$ no podemos saber si la función es creciente o decreciente en x_o.

La función $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^2$ es derivable $\forall x \in R$ siendo $f'(x) = 2x$. En $x = -1$: $f'(-1) = -2 < 0$ es decreciente, en $x = 1$: $f'(1) = 2 > 0$ es creciente, y en $x = 0$: $f'(x) = 0$, no es creciente ni decreciente.



Si la función f es derivable sobre el intervalo I; se verifica:

— f creciente sobre I $\Rightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\quad \forall x \in I$

— f decreciente sobre I $\Rightarrow$ $f'(x) \leq 0$ $\quad \forall x \in I$

— f constante sobre I $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$ $\quad \forall x \in I$

— $f'(x) > 0$ $\quad \forall x \in I$ $\Rightarrow$ f es estrictamente creciente en I

— $f'(x) < 0$ $\quad \forall x \in I$ $\Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en I

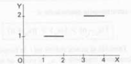
— $f'(x) = 0$ $\quad \forall x \in I$ $\Rightarrow$ f es constante en I

Las propiedades anteriores sólo son válidas si la función f es derivable en el intervalo I. Si I no es un intervalo, no se pueden aplicar.

La función f definida en el conjunto $[1, 2] \cup [3, 4]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 2 & \text{si } x \in [3, 4] \end{cases}$$

es tal que $f'(x) = 0$ para todo x perteneciente a su campo de definición, y sin embargo, la función no es constante en dicho campo (este campo no es un intervalo).



Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función f se obtienen las raíces de $f'(x) = 0$ y los puntos donde no existe $f'(x)$. Tendremos así los posibles extremos de los intervalos en los que cambia el signo de $f'(x)$.

Sea hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

$$f(x) = x - 3x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = 1 - 2\,\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} \;;\quad f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = 8$$

para $x = 0$ se anula el denominador de $f'(x)$, lo que implica que no existe $f'(0)$.

Con estos datos podemos formar el siguiente cuadro, donde con ↗ simbolizamos que la función es creciente y con ↘ que es decreciente.

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	no existe	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

La función es creciente en los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]8, +\infty[$ y decreciente en $]0, 8[$

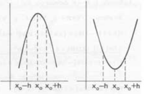
MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION.

La función f definida en el intervalo I tiene un **máximo** relativo en el punto $x_o \in I$, si exis un entorno simétrico de centro x_o y radio δ, tal que para h, $0 < h < \delta$, se verifica:

$$\boxed{f(x_o - h) < f(x_o) > f(x_o + h)}$$

y tiene un **mínimo** relativo en x_o si:

$$\boxed{f(x_o - h) > f(x_o) < f(x_o + h)}$$



MAXIMO MINIMO

También se puede definir así: La función f tiene en el punto x_o un máximo relativo si existe un entorno E de x_o tal que para todo x de E se verifica:

$$\boxed{f(x) < f(x_o)} \qquad (3)$$

y tiene en x_o un mínimo relativo si

$$\boxed{f(x) > f(x_o)} \qquad (4)$$

Si la función tiene en x_o un máximo o un mínimo, se dice que tiene un extremo en x_o.

Si la desigualdad (3) se verifica para todo $x \in I$, la función tiene en x_o un máximo absoluto I. Si (4) se verifica para todo $x \in I$, la función tiene en x_o un mínimo absoluto.

Si la función f es derivable en x_o y tiene un máximo o un mínimo en x_o, se verifica que $f'(x_o) =$

La condición $f'(x_o)$ es condición necesaria, pero no es suficiente para que haya extremo en x_c Si $f'(x_o) = 0$, para ver si la función tiene en x_o un extremo hay que estudiar el signo de $f'(x)$ a d cha e izquierda de x_o: Sea h un infinitésimo.

$$f'(x_o) = 0 \quad \left| \begin{array}{ll} \left| \begin{array}{l} f'(x_o - h) > 0 \\ f'(x_o + h) < 0 \end{array} \right. \Rightarrow & \text{f tiene un máximo en } x_o \\ \left| \begin{array}{l} f'(x_o - h) < 0 \\ f'(x_o + h) > 0 \end{array} \right. \Rightarrow & \text{f tiene un mínimo en } x_o \\ f'(x_o - h) \text{ y } f'(x_o + h) \text{ tienen el mismo signo} \Rightarrow & \text{f no tiene extremo en} \end{array} \right.$$

Para hallar los máximos y mínimos de la función $f: I \to \mathbf{R}$, se obtienen las raíces de $f'(x) = 0$ los puntos donde no existe $f'(x)$. Tendremos así los posibles puntos, junto con los extremos del inte lo I, si éste es compacto (cerrado y acotado), donde la función puede tener máximos o mínimos.

Sea hallar los extremos de la función $f: [-8, 10] \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

$$f(x) = x - 3x^{\frac{3}{3}} \Rightarrow f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} \;;\; f'(x) = 0 \Rightarrow x = 8$$

$f'(x)$ no existe para $x = 0$

Los posibles puntos donde hay extremos son 8, 0, − 8 y 10. (−8 y 10 son los extremos del conjunto de definic

x	− 8		0		8		10
f'(x)		+	no existe	—	0	+	
f(x)	−30	↗	0	↘	−4	↗	$10 - 3\sqrt[3]{100} \approx -3{,}92$

La función tiene en $x = -8$ un mínimo absoluto igual a − 30, en $x = 0$ un máximo absoluto igual a 0, er $x = 8$ un mínimo relativo igual a −4 y en $x = 10$ un máximo relativo igual a $10 - 3\sqrt[3]{100}$.

FUNCIONES CONVEXAS.

La función real **f** definida en el intervalo **I** es **convexa** en I, si cualesquiera que sean los puntos $a \in I$ y $b \in I$, y el número real $\lambda \in [0,1]$, se tiene:

$$\boxed{f[\lambda a + (1-\lambda) b] \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)}$$

La función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ es convexa en cualquier intervalo I de **R**.

En efecto : $\forall a \in I$ y $\forall b \in I$, y $\forall \lambda \in [0,1]$:

$$f[\lambda a + (1-\lambda) b] = [\lambda a + (1-\lambda) b]^2 = \lambda^2 a^2 + (1-\lambda)^2 b^2 + 2\lambda(1-\lambda) ab$$

$$\underline{\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) = \lambda a^2 + (1-\lambda) b^2}$$

$$f[\lambda a + (1-\lambda) b] - \lambda f(a) - (1-\lambda) f(b) = \lambda a^2 (\lambda - 1) + (1-\lambda) b^2 (1-\lambda-1) + 2\lambda(1-\lambda) ab =$$

$$= -\lambda(1-\lambda)(a^2 + b^2 - 2ab) = -\lambda(1-\lambda)(a-b)^2 \leqslant 0 \Rightarrow$$

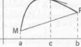
$$f[\lambda a + (1-\lambda) b] \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \Rightarrow \text{ f es convexa.}$$

La función **f** es **cóncava** en el intervalo **I** si la función **−f** es convexa en el intervalo **I**.

Geométricamente: Si (C) es la curva representativa de la función convexa **f** en el intervalo $I = [a,b]$, la cuerda de extremos $M[a, f(a)]$ y $P[b, f(b)]$ está por encima del arco de curva MP. Si la función es cóncava, la cuerda MP está por debajo del arco MP.

FUNCION CONVEXA

Si la función **f** es derivable en el intervalo I, la tangente a la curva en cualquier punto de abscisa $c \in [a, b]$ está por debajo del arco MP si la función es convexa. Si la función es cóncava, la tangente está por encima del arco MP.



FUNCION CONCAVA

Para que la función **f**, derivable en el intervalo I sea **convexa** en I, es necesario y suficiente que su derivada **f'** sea creciente en I.

La función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ es convexa en cualquier intervalo $I = [a, b]$ de R.

En efecto: $f'(x) = 2x \Rightarrow \dfrac{f'(b) - f'(a)}{b-a} = \dfrac{2b - 2a}{b-a} = 2 > 0 \Rightarrow f'$ es creciente $\Rightarrow$ f es convexa.

Para que la función **f**, dos veces derivable en el intervalo **I**, sea **convexa** en I, es necesario y suficiente que $f''(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in I$.

La función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2$ es convexa en todo intervalo I de R.

En efecto: $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ f es convexa en I.

Para que la función **f**, derivable en el intervalo I sea **cóncava** en I, es necesario y suficiente que su derivada **f'** sea decreciente en I.

La función $f:]-\infty, 0[\to R$ definida por $f(x) = x^3$ en cóncava en cualquier intervalo $I = [a, b] \subset]-\infty, 0[$.

En efecto: $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow \dfrac{f'(b) - f'(a)}{b-a} = \dfrac{3b^2 - 3a^2}{b-a} = \dfrac{3(b+a)(b-a)}{b-a} = 3(b+a) < 0$ (puesto que a y b son dos números negativos) $\Rightarrow$ f' es decreciente $\Rightarrow$ f es cóncava.

Para que la función f, dos veces derivable en el intervalo I, sea **cóncava** en I, es necesario y suficiente que $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.

La función $f:]-\infty, 0[\to R$ definida por $f(x) = x^3$ es cóncava en cualquier intervalo de su conjunto de definición.

En efecto: $f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x < 0$, para todo $x < 0 \Rightarrow f$ es cóncava.

Para hallar los intervalos de convexidad y concavidad de una función f, se hallan las raices de $f''(x) = 0$, y los valores de x en los que no existe f''. Tendremos así los posibles puntos en los que cambia la convexidad de la función.

Estudiemos la convexidad de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x\, e^{\frac{-x^2}{2}}$

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{-2x}{2} = (1-x^2)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\ ; \quad f''(x) = -2x\, e^{-\frac{x^2}{2}} + (1-x^2)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{-2x}{2} = x(x^2-3)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

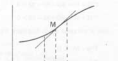
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x(x^2-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -\sqrt{3} \Rightarrow f''(x) = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$	
f	cóncava		convexa		cóncava		convexa	

La definición que hemos dado de función convexa y función cóncava es la admitida internacionalmente. Las expresiones de cóncava (o convexa) hacia las $y > 0$ o hacia las $y < 0$ están anticuadas y deben evitarse.

PUNTO DE INFLEXION.

Sea f una función real derivable en un entorno del punto a, y (C) su curva respecto de un sistema de referencia ortonormal.

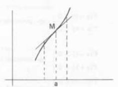


El punto $M[a, f(a)]$ es un **punto de inflexión** de (C) si la tangente a (C) en este punto atraviesa a la curva.

La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa a es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) \Rightarrow y_t = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

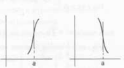
$$y_c - y_t = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a) \qquad (1)$$



El punto $M[a, f(a)]$ es de inflexión si el signo de la expresión (1) en un entorno de a, es distinto para $x < a$ que para $x > a$.

En el punto de inflexión la función pasa de convexa a cóncava, o de cóncava a convexa. Es condición necesaria, para que el punto de abscisa a sea de inflexión, que $f''(a) = 0$.

Si la función es continua en el punto a, y tiene derivada infinita en dicho punto pero con signos iguales a derecha e izquierda, se dice que $M[a, f(a)]$ es un punto de inflexión con tangente vertical.



Dada la función f, para hallar los puntos de inflexión se calculan las raices de $f''(x) = 0$ y los valores de x para los que se hace infinita la expresión $f'(x)$. Tendremos así los posibles valores de x de los puntos de inflexión. El signo de $f''(x)$ a derecha e izquierda de cada una de las raices de $f''(x) = 0$ nos dirá si tenemos punto de inflexión. El signo de $f'(x)$ a derecha e izquierda de cada uno de los valores que hacen infinita a $f'(x)$ nos dirá si estos punto son o no de inflexión.

Sea a una raiz de $f''(x) = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f''(a-h) > 0 \\ f''(a+h) < 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de inflexión}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(a-h) < 0 \\ f''(a+h) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de inflexión}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(a-h) > 0 \\ f''(a+h) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{no hay punto de inflexión} \; ; \quad \left.\begin{array}{l} f''(a-h) < 0 \\ f''(a-h) < 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{no hay punto de inflexión}$$

Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = x^4$:

$$f'(x) = 4x^3 \; ; \; f''(x) = 12x^2 \; ; \; f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0 : \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f''(0-h) = 12(-h)^2 > 0 \\ f''(0+h) = 12h^2 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

el punto de abscisa $x = 0$ no es punto de inflexión.

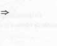
Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \; ; \quad f''(x) = 6x - 12 \; ; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0, \; x = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(2-h) = 6(2-h) - 12 < 0 \\ f''(2+h) = 6(2+h) - 12 > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{el punto de abscisa 2 es punto de inflexión}$$

Sea a un valor de x que hace $f'(x) = \pm\infty$:

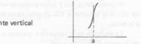
$$\left.\begin{array}{l} f'(a-h) > 0 \\ f'(a+h) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de inflexión con tangente vertical}$$



$$\left.\begin{array}{l} f'(a-h) < 0 \\ f'(a+h) < 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de inflexión con tangente vertical}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(a-h) > 0 \\ f'(a+h) < 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de retroceso}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(a-h) < 0 \\ f'(a+h) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{punto de retroceso}$$



Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$: $\Rightarrow$ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\Rightarrow$ $f'(0) = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0-h) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(-h)^2}} > 0 \\ f'(0+h) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}} > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{el punto (0,0) es punto de inflexión con tangente vertical.}$$

CALCULO DE LOS MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION APLICANDO LAS DERIVADAS SUCESIVAS:

Obtenida la raíz a de la ecuación $f'(x)=0$, para saber si en este punto hay máximo o mínimo o punto de inflexión, se procede así:

$$f'(a)=0 \begin{cases} f''(a)>0 \quad \text{mínimo} \\ f''(a)<0 \quad \text{máximo} \\ f''(a)=0 \begin{cases} f'''(a)\neq 0 \quad \text{punto de inflexión con tangente horizontal} \\ f'''(a)=0 \begin{cases} f^{(4}(a)>0 \quad \text{mínimo} \\ f^{(4}(a)<0 \quad \text{máximo} \\ f^{(4}(a)=0 \begin{cases} f^{(5}(a)\neq 0 \quad \text{p. inflexión con tg. hor.} \\ f^{(5}(a)=0 \begin{cases} f^{(6}(a)> \text{mínimo} \\ f^{(6}(a)< \text{máximo} \\ f^{(6}(a)=0\,\ldots\ldots. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Si la primera derivada que no se anula en el punto a, después de $f'(a)=0$, es de orden par, hay máximo o mínimo, y si es de orden impar, hay punto de inflexión con tangente horizontal.

Sea hallar los máximos y mínimos de la función $f:\ R \to R$ definida por $f(x) = x^4(6-x^2)$.

$$f(x) = 6x^4 - x^6\ ; \qquad f'(x) = 24x^3 - 6x^5 = 6x^3(4-x^2)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^3(4-x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^3=0,\ x=0 \\ 4-x^2=0,\ x=2,\ x=-2 \end{cases}$$

$$f''(x) = 72x^2 - 30x^4\ ;\ f'''(x) = 144x - 120x^3\ ;\ f^{(4}(x) = 144 - 360x^2$$

$f'(0) = 0\ ;\ f''(0)=0\ ;\ f'''(0)=0\ ;\ f^{(4}(0) = 144 > 0 \Rightarrow$ en $x=0$ hay un mínimo

$f'(2) = 0\ ;\ f''(2) = 72\cdot 4 - 30\cdot 16 = -192 < 0 \Rightarrow$ en $x=2$ hay un máximo

$f'(-2) = 0\ ;\ f''(-2) = 72\cdot 4 - 30\cdot 16 = -192 < 0 \Rightarrow$ en $x=-2$ hay un máximo

ESTUDIO DE LA CONVEXIDAD EN EL PUNTO a:

Sea la función f que admite derivadas sucesivas en el punto a:

$f''(a) > 0 \Rightarrow$ la función es convexa en a.

$f''(a) < 0 \Rightarrow$ la función es cóncava en a.

$$f''(a)=0 \begin{cases} f'''(a)\neq 0 \Rightarrow \text{la función tiene en el punto a un punto de inflexión.} \\ f'''(a)=0 \begin{cases} f^{(4}(a)>0 \Rightarrow \text{la función es convexa en a.} \\ f^{(4}(a)<0 \Rightarrow \text{la función es cóncava en a.} \\ f^{(4}(a)=0 \begin{cases} f^{(5}(a)\neq 0 \Rightarrow \text{punto de inflexión en a.} \\ f^{(5}(a)=0,\ldots\ldots. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Sea $k > 1$ el orden de la primera derivada no nula en el punto a, si k es impar, la curva de la función f tiene en el punto de abscisa a un punto de inflexión, si k es par y $f^{(k}(a) > 0$, la función es convexa en a y si $f^{(k}(a) < 0$, la función es cóncava en a.

Sea hallar la concavidad o convexidad en el punto 0 de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^n$, siendo n un número natural.

$$f'(x) = nx^{n-1} \; ; \; f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \; ; \; f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3} ; \ldots ; \; f^{(n-1}(x) = n! \cdot x \; ; \; f^{(n}(x) = n!$$

$$f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n-1}(0) = 0 \; ; \; f^{(n}(0) = n! > 0$$

- si n es par, la función es convexa en 0.
- si n es impar, la curva de la función tiene en $x = 0$ un punto de inflexión (con tangente horizontal, por ser $f'(0) = 0$).

PROBLEMAS

7.1 Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = (x-1)\,e^x$$

(Univ. de León)

$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1)\,e^x = x \cdot e^x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^x = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ e^x = 0 \end{cases}$ (no tiene solución)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	$-$	0	+
f(x)	decreciente		creciente

7.2 Dada la función $f: [0, 2\pi] \to R$ definida por

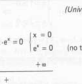
$$f(x) = x + 5 - 2 \operatorname{sen} x$$

hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Univ. de Santiago)

$f'(x) = 1 - 2\cos x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2\cos x = 0$; $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Los valores de x que cumplen esta igualdad en el intervalo $[0, 2\pi]$ son:

$$\frac{\pi}{3} \quad \text{y} \quad 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$



Para $x \in [0, \frac{\pi}{3}[$, $\quad 1 \geq \cos x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x < 0$, la función es decreciente

" $\quad x \in]\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}[$, $-1 < \cos x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x > 0$, la función es creciente

" $\quad x \in]\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$, $\dfrac{1}{2} < \cos x \leq 1 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x < 0$, la función es decreciente

7.3 **Hallar el conjunto original A de la función real $f: A \to R$ definida por**

$$f(x) = \log (x-1)(x-2)$$

y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(Univ. de Santiago)

Como sólo los números mayores que cero tienen logaritmo (real), la función existirá solo para los valores de x que hagan $(x-1)(x-2) > 0$, o lo que es lo mismo, los valores de x para los que los factores $x-1$ y $x-2$ tengan el mismo signo. Estos factores se anulan en $x = 1$ y en $x = 2$, por tanto tendremos que estudiar su signo en los intervalos $]-\infty, 1[$, $]1, 2[$ y $]2, +\infty[$.

Para $x \in]-\infty, 1[$ $\left|\begin{array}{l} x-1<0 \\ x-2<0 \end{array}\right. \Rightarrow (x-1)(x-2) > 0$

Para $x \in]1, 2[$ $\left|\begin{array}{l} x-1>0 \\ x-2<0 \end{array}\right. \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0$

Para $x \in]2, +\infty[$ $\left|\begin{array}{l} x-1>0 \\ x-2>0 \end{array}\right. \Rightarrow (x-1)(x-2) > 0$

de donde $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento hay que estudiar el signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x-2)+(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$$

El numerador se anula para $x = \frac{3}{2}$ y el denominador para $x = 1$ y $x = 2$. Para estudiar el signo de $f'(x)$ habría que ver el signo en los intervalos $]-\infty, 1[$, $]1, \frac{3}{2}[$, $]\frac{3}{2}, 2[$ y $]2, +\infty[$, pero como sólo en el primero y en el último está definida la función f, los otros se descartan:

Para $x \in]-\infty, 1[$ $\left|\begin{array}{l} 2x-3<0 \\ x-1<0 \\ x-2<0 \end{array}\right. \Rightarrow f'(x) < 0,$

la función es decreciente.

Para $x \in]2, +\infty[$ $\left|\begin{array}{l} 2x-3>0 \\ x-1>0 \\ x-2>0 \end{array}\right. \Rightarrow f'(x) > 0$

la función es creciente.

7.4 Demostrar que la ecuación

$$x^3 - 36x + 10 = 0$$

no puede tener dos raíces reales en el intervalo $]-1, 2[$. ¿Tiene alguna raíz en este intervalo?

(Univ. de Málaga) – (Univ. de Murcia, 1991)

Estudiemos la función $f: [-1,2] \to R$ definida por $f(x) = x^3 - 36x + 10$:

$$f(-1) = -1 + 36 + 10 = 45 > 0 \;;\quad f(2) = 8 - 72 + 10 = -54 < 0$$

La función, por ser polinómica, es continua en el intervalo $[-1,2]$, y como $f(-1)\cdot f(2) < 0$, segú el teorema de Bolzano, existe al menos un $c \in]-1,2[$ tal que $f(c) = 0$. La ecuación tiene por lo men una raíz.

$$f'(x) = 3x^2 - 36 = 3(x^2 - 12) \;;\; f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 12 = 0 \;;\; x = \pm\sqrt{12} \quad\Rightarrow$$

$$f'(x) = 3(x+\sqrt{12})(x-\sqrt{12}) \quad\Rightarrow$$

x	−1		2
f'(x)		−	
f(x)	45	↘	−54

$\Rightarrow$

la función es estrictamente decreciente en el intervalo $[-1,2]$, la raíz anterior es única.

7.5 **Demostrar que la ecuación $x^5 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real entre 0 y 1.**

(Univ. de Madrid, 1991)

Estudiemos la función $f: [0,1] \to R$ definida por $f(x) = x^5 + x - 1$:

$$f(0) = -1 \;; \qquad f(1) = 1 + 1 - 1 = 1$$

La función, por ser polinómica, es continua y como $f(0)\cdot f(1) < 0$, según el teorema de Bolzar existe al menos un $c \in]0,1[$ tal que $f(c) = 0$, o sea que la ecuación $f(x) = 0$ tiene por lo menos u raíz.

$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1] \Rightarrow$ la función es estrictamente creciente, lo que implica la raíz anterior es única.

7.6 **Demostrar que para cada número real $x > 1$, se verifica la siguiente desigualdad:**

$$\log x > \frac{2(x-1)}{x+1} \qquad (\log = \text{logaritmo neperiano})$$

(Univ. de Valladolid, 1991)

Se verificará la desigualdad si la función $f: [1, +\infty[\to R$ definida por $f(x) = \log x - \dfrac{2(x-}{x+}$ es no negativa.

$$f(1) = \log 1 - \frac{2(1-1)}{1+1} = 0 - 0 = 0.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2(x+1) - 2(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4x}{x(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{x(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0 \quad \text{para } x > 1 \;\Rightarrow\; \text{la función } f \text{ es creciente en todo}$$

campo de definición.

Si $f(1) = 0$ y la función f es creciente, $f(x) > 0 \quad \forall x \in [1, +\infty[\;\Rightarrow\; \log x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$

7.7 Si $x > 0$, demostrar que $x > \log(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$

(Univ. de Sevilla)

Consideremos la función $f: R_+ \to R$ definida por $f(x) = x - \log(1+x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \quad \forall x > 0, \text{ siendo } f(0) = 0 - \log 1 = 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	creciente

$\Rightarrow \quad \forall x > 0: \; f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x - \log(1+x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \log(1+x) \qquad (1)$

Sea la función $g: R_+ \to R$ definida por $g(x) = \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$:

$$g(0) = 0\,; \; g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1(1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1+x-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0 \quad \forall x > 0$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	creciente

$\Rightarrow \quad \forall x > 0: \; g(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \log(1+x) - \dfrac{x}{1+x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \log(1+x) > \dfrac{x}{1+x} \qquad (2)$

De (1) y (2) resulta: $\forall x > 0, \quad x > \log(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$

7.8 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Estudiar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos.

(Univ. de Madrid, 1991)

La función no está definida para $x = 1$, valor que anula el denominador

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0\,; \quad x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & ; \quad f(0) = 0 \\ x = 2 & \quad\;\; f(2) = 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$		+	0	—		—	0	+	
$f(x)$		↗	0	↘		↘	4	↗	

La función es creciente en $]-\infty, 0[\; \cup \;]2, +\infty[$, es decreciente en $]0, 1[\cup]1, 2[$, tiene un máximo relativo para $x = 0$ y un mínimo relativo para $x = 2$.

7.9 Si f es una función definida en $D = \{x \in R: \ 0 < x < 2\pi\}$ tal que $\forall x \in D$

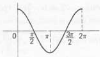
$$f'(x) = \frac{\cos x}{-x}$$

obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f (no debe intentarse el cálculo de f).

(Univ. de Santiago)

Recordando la variación de $\cos x$ en el intervalo $]0, 2\pi[$ y como $-x$ es negativo en dicho intervalo:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
f'(x)		—	0	+	0	—	
f(x)		↘		↗		↘	



o sea que la función es decreciente en los intervalos $]0, \frac{\pi}{2}[$ y $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$, creciente en el intervalo $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, tiene un mínimo en $x = \frac{\pi}{2}$ y un máximo en $x = \frac{3\pi}{2}$.

7.10 Encontrar las funciones polinómicas $ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya segunda derivada sea $x - 1$. ¿Cuál o cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$?

(Univ. de Valencia)

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ ; \quad P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \ ; \quad P''(x) = 6ax + 2b$$

$$P''(x) = x - 1 \Rightarrow 6ax + 2b = x - 1 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 6a = 1 \\ 2b = -1 \end{array}\right. \Rightarrow a = \frac{1}{6} \ ; \quad b = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d}$$

Si $P(x)$ tiene un mínimo en el punto $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$, se verificará:

$$\left.\begin{array}{l} P(4) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{6}4^3 - \frac{1}{2}4^2 + 4c + d = -\frac{1}{3} \\ P'(4) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}4^2 - 4 + c = 0 \end{array}\right| \quad c = -4 \ ; \quad d = 13 \Rightarrow$$

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 13}$$

7.11 Obtener los extremos relativos y absolutos así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$

(Univ. de Madrid, 1991)

$f(x) = \text{sen}\, x + \text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x)$

Transformemos esta suma de senos en producto:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \cos a \cdot \text{sen}\, b \\ \text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b - \cos a \cdot \text{sen}\, b \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b) = 2\,\text{sen}\, a \cdot \cos b$$

haciendo $\left.\begin{array}{l} a+b = x \\ a-b = \frac{\pi}{2} - x \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4};\ b = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(x) = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4})$

$$f'(x) = -\sqrt{2}\,\text{sen}\,(x - \frac{\pi}{4})\ ;\ f'(x) = 0 \Rightarrow \text{sen}\,(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = 0\ ;\ x = \frac{\pi}{4} \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi \quad x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \end{array}\right.$$

$f(0) = \sqrt{2} \cdot \cos(-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1\ ;\ f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos 0 = \sqrt{2}\ ;\ f(\pi + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos \pi = -\sqrt{2}\ ;$

$f(2\pi) = \sqrt{2}\cos(2\pi - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

La función es creciente en los intervalos $[0, \frac{\pi}{4}[$ y $]\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$, y es decreciente en el intervalo $]\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$.

En $x = 0$ tiene un mínimo relativo, en $x = \frac{\pi}{4}$ un máximo absoluto, en $x = \frac{5\pi}{4}$ un mínimo absoluto y en $x = 2\pi$ un máximo relativo.

7.12 Sea $f(x)$ una función definida y continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si $c \in]a, b[$, razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si $f'(c) = 0$, entonces f admite máximo o mínimo relativo en c.

b) Si f admite máximo o mínimo relativo en c, entonces $f'(c) = 0$.

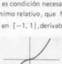
(Univ. de Valencia)

a) No se puede afirmar que la función f tenga en c un máximo o mínimo relativo.

Si la función f es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, es condición necesaria, pero **no suficiente**, para que en $c \in]a, b[$ la función admita un máximo o mínimo relativo, que $f'(c) = 0$.

La función $f: R \to R$, definida por $f(x) = x^3$, es continua en $[-1, 1]$, derivable en $]-1, 1[$,

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$, y sin embargo no tiene máximo ni mínimo en $x = 0$:



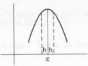
$f(0-h) = (-h)^3 = -h^3\ ;\ f(0) = 0\ ;$

$f(h) = h^3 \Rightarrow f(0-h) < f(0) < f(0+h)$

b) Si f admite máximo en c, siendo $h > 0$:

$$f(c-h)-f(c) < 0 \Rightarrow \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} > 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geq 0$$



$$f(c+h)-f(c) < 0 \Rightarrow \frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

como, por hipótesis, la función es derivable, existen ambos límites y son iguales. Como el primer límite es ≥ 0 y el segundo ≤ 0, para ser iguales tendrán que ser ambos nulos, o sea que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) = 0$$

7.13 Dada la función $f:]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \sqrt[x]{x}$$

hallar sus máximos y mínimos.

(Univ. de Madrid)

$f(x)$ es positiva para todo $x > 0$.

Tomando logaritmos neperianos en $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$: $\quad \log f(x) = \frac{1}{x} \log x$

Derivando: $\quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-1}{x^2} \log x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - \log x) \Rightarrow$

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{1}{x^2}(1-\log x) = x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}(1-\log x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}(1-\log x) = 0 \Rightarrow 1 - \log x = 0\ ;\ \log x = 1\ ;\ x = e$$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$—$	
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt[e]{e}$	$\nearrow$	

$\Rightarrow$ la función tiene un mínimo en $x = e$.

7.14 Obtener los extremos relativos de

$$f(x) = x \cdot (\log x)^n$$

donde log es el logaritmo neperiano y n un número par igual o mayor que 2.

(Univ. de Cantabria)

(Tendremos en cuenta que $\log 1 = 0$, si $h > 0$: $\log(1-h) < 0$, $\log(1+h) > 0$, y que las potencias impares de números negativos son negativas).

$$f'(x) = 1\cdot(\log x)^n + x\cdot n(\log x)^{n-1}\frac{1}{x} = (\log x)^{n-1}\cdot(\log x + n)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (\log x)^{n-1}\cdot\log(x+n) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\log x)^{n-1} = 0; & x = 1 \\ \log x + n = 0; & \log x = -n, \quad x = e^{-n} \end{cases}$$

Estudio en $x = 1$. Siendo $h > 0$:

$$\left.\begin{aligned} f'(1-h) &= [\log(1-h)]^{n-1}\cdot[\log(1-h)+n] = (-\cdot+=-) < 0 \\ f'(1+h) &= [\log(1+h)]^{n-1}\cdot[\log(1+h)+n] = (+\cdot+=+) > 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{existe un mínimo en}$$

$x = 1$ igual a $f(1) = 1\cdot(\log 1)^n = 1\cdot 0 = 0$

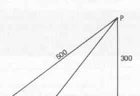
Estudio en $x = e^{-n}$: Si $\log e^{-n} = -n$, $\log(e^{-n}-h) < -n$, y $\log(e^{-n}+h) > -n$, de donde

$$\left.\begin{aligned} f'(e^{-n}-h) &= [\log(e^{-n}-h)]^{n-1}\cdot[\log(e^{-n}-h)+n] = (-\cdot-=+) > 0 \\ f'(e^{-n}+h) &= [\log(e^{-n}+h)]^{n-1}\cdot[\log(e^{-n}+h)+n] = (-\cdot+=-) < 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{existe un máxi-}$$

mo en $x = e^{-n}$ igual a $f(e^{-n}) = e^{-n}(\log e^{-n})^n = e^{-n}(-n)^n = \dfrac{n^n}{e^n}$.

7.15 En una carretera a través del desierto un automóvil debe ir desde la ciudad A hasta el oasis P situado a 500 km de distancia de A. Puede aprovechar para ello una carretera recta que une las ciudades A y B y que le permite ir a una velocidad de 100 km/h, mientras que por el desierto la velocidad es de 60 km/h. Sabiendo que la distancia más corta de P a la carretera que une las ciudades A y B es de 300 km, determinar la ruta que deberá usar para ir de A a P en el menor tiempo posible.

(Univ. de Murcia)



Sea C el pie de la perpendicular del punto P sobre la recta AB: en el triángulo rectángulo ACP:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400$$

Sea M el punto donde el automóvil deja la carretera, si la distancia AM es igual a x: En el triángulo rectángulo MCP:

$$\overline{MP} = \sqrt{\overline{MC}^2 + \overline{CP}^2} = \sqrt{(400-x)^2 + 300^2}$$

El tiempo que el automóvil tarda en recorrer la distancia AM + MP será:

$$t = \frac{x}{100} + \frac{\sqrt{(400-x)^2 + 90000}}{60}; \qquad t' = \frac{1}{100} + \frac{1}{60}\,\frac{2(400-x)(-1)}{2\sqrt{(400-x)^2 + 90000}};$$

Es condición necesaria para que el tiempo sea mínimo que $t' = 0$:

$$t' = 0 \Rightarrow \frac{1}{100} - \frac{400-x}{60\sqrt{(400-x)^2+90000}} = 0 \Rightarrow 60\sqrt{(400-x)^2+90000} = 100\,(400-x)\ ;$$

$$36\,[(400-x)^2+90000] = 100\,(400-x)^2\ ;\quad 64\,(400-x)^2 = 36\cdot 90000$$

$$400 - x = \frac{6\cdot 300}{8} = 225 \Rightarrow x = 175$$

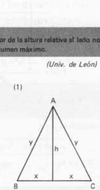
El automovil deja la carretera a 175 km del punto A.

7.16 Un triángulo isósceles de perimetro 10 m gira alrededor de la altura relativa al lado no igual engendrando un cono. Hallar sus lados para que el cono tenga volumen máximo.

(Univ. de León)

Sean los lados $AB = AC = y$, $BC = 2x$: $2y + 2x = 10$ (1)

El volumen del cono es igual a un tercio del área de la base por la altura:



$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{1}{3}\pi x^2\cdot h \\ h = \sqrt{y^2-x^2} \end{array}\right|\quad V = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{y^2-x^2} \qquad (2)$$

De (1): $y = 5 - x$, llevando este valor a (2)

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{(5-x)^2-x^2} = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{25-10x}$$

$$V' = \frac{1}{3}\pi\left(2x\sqrt{25-10x} + x^2\cdot\frac{-10}{2\sqrt{25-10x}}\right) = \frac{1}{3}\pi\,\frac{2x(25-10x)-5x^2}{\sqrt{25-10x}} = \frac{1}{3}\pi\,\frac{50x-25x^2}{\sqrt{25-10x}} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\,\frac{25x\,(2-x)}{\sqrt{25-10x}}$$

$$V' = 0 \Rightarrow 25x\,(2-x) = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{ll} x = 0 & \text{(solución no válida, no habría triángulo)} \\ 2-x = 0; & x = 2 \end{array}\right.$$

Si $h > 0$: $V'(2-h) = \frac{1}{3}\pi\,\frac{25(2-h)h}{\sqrt{25-10(2-h)}} > 0$

$V'(2+h) = \frac{1}{3}\pi\,\frac{25(2+h)(-h)}{\sqrt{25-10(2+h)}} < 0$ — la función V tiene un máximo para $x = 2$

Si $x = 2$, los lados valen: $BC = 2x = 4$; $AB = AC = y = 5 - x = 5 - 2 = 3$

7.17 Estudiar el crecimiento y la concavidad de la función $f\colon\ ]0, +\infty[\ \to R$ definida por

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \qquad (\log = \text{logaritmo neperiano})$$

(Univ. de Castilla–La Mancha, 1991)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-\log x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1-\log x = 0\ ;\ \log x = 1\ ;\ x = e$$

x	0		e		$+\infty$
f'(x)		+	0	—	
f(x)		creciente	máximo	decreciente	

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x(1-\log x)}{x^4} = \frac{-1-2(1-\log x)}{x^3} = \frac{2\log x - 3}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2\log x - 3}{x^3} = 0 \Rightarrow 2\log x - 3 = 0\ ;\ \log x = \frac{3}{2}\ ;\ x = e^{\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
f''(x)		—		+	
f(x)		cóncava		convexa	

7.18 Estudiar la concavidad de la función $f:\ R \to R$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

(Univ. de Salamanca)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot \frac{-2x}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot x$$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} (-x)x + \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot 1 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} (1-x^2)$$

$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{-x^2}{2}}(1-x^2) = 0 \Rightarrow$ (puesto que $e^{\frac{-x^2}{2}} \neq 0$ cualquiera que sea x)

$1-x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = -1$

Estos son los posibles valores de x en los que cambia el signo de $f''(x)$.

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
f''(x)	+		−		+	
f(x)	convexa		cóncava		convexa	

7.19 **Hallar los valores de m para que la función f: R → R definida por**

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2 + 3x - 2$$

sea convexa para todo x ∈ R.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2mx + 3 \;; \quad f''(x) = 12x^2 + 24x + 2m = 2(6x^2 + 12x + m)$$

La función será convexa para todo $x \in R$, si para todo $x \in R$ se verifica que $f''(x) \geqslant 0$.

Una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ es $\geqslant 0$ para todo valor real de x si $a > 0$ y sus raices son imaginarias o iguales ($b^2 - 4ac \leqslant 0$).

$$6x^2 + 12x + m \geqslant 0 \Rightarrow 12^2 - 4 \cdot 6 \cdot m \leqslant 0 \Rightarrow 144 \leqslant 24\,m\,; \quad \boxed{m \geqslant 6}$$

7.20 **Estudiar, según los valores de a, la concavidad y convexidad de la función f: R → R definida por**

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + x + 1$$

(Univ. de Alicante)

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2ax + 1 \;; \quad f''(x) = 12x^2 + 12x + 2a$$

Hallemos las raices de $f''(x) = 0$: $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x + a = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 24a}}{12}$

— si $36 - 24a = 0$: $a = \dfrac{36}{24} = \dfrac{3}{2}$, las dos raices son iguales: $x_1 = -\dfrac{1}{2}$: $f''(x) = 12(x + \dfrac{1}{2})^2 \geqslant 0$, la función será convexa $\forall x \in R$

— si $36 - 24a > 0$: $a < \dfrac{3}{2}$, las dos raices son distintas, $x_1 \neq x_2$: $f''(x) = 12(x - x_1)(x - x_2)$ y según x pertenezca o no al intervalo $[x_1, x_2]$, $f''(x)$ será negativa o positiva, y la función f será cóncava o convexa.

— si $36 - 24a < 0$: $a > \dfrac{3}{2}$, las raices serán imaginarias; $x_1 = m + ni$; $x_2 = m - ni$;

$f''(x) = 12(x - m - ni)(x - m + ni) = 12[(x - m)^2 + n^2] > 0$, la función será convexa $\forall x \in R$.

7.21 Estudiar la existencia de extremos relativos para la función f: R → R definida por

$$f(x) = (x + 1)^{101}$$

¿Es inyectiva? ¿Y biyectiva?

(Univ. de Murcia)

$$f'(x) = 101(x + 1)^{100};\; f'(x) = 0 \Rightarrow 101 \cdot (x + 1)^{100} = 0 \;;\; x + 1 = 0 \;;\; x = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1 - h) = 101(-1 - h + 1)^{100} = 101(-h)^{100} > 0 \\ f'(-1 + h) = 101(-1 + h + 1)^{100} = 101(h)^{100} > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \text{la función tiene en } x = -1 \text{ un pun-}$$

to de inflexión con tangente horizontal, siendo estrictamente creciente en todos sus puntos, ya que $f'(x) > 0$ para todo valor real de x, excepto para $x = 0$ que es igual a 0.

La función, por ser extrictamente creciente en todos sus puntos, en inyectiva y biyectiva. También se puede estudiar así: Si a y b son dos números reales cualesquiera:

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)\text{ , ya que } (a+1)^{101} \neq (b+1)^{101} \Rightarrow f \text{ es inyectiva}$$

Sea a un número real cualquiera. Veamos cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = a$:

$f(x) = a \Rightarrow (x+1)^{101} = a \Rightarrow x+1 = a^{\frac{1}{101}} \Rightarrow x = a^{\frac{1}{101}} - 1$, una sola solución, esto implica que f es biyectiva.

7.22 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hallar los coeficientes a, b, c y d, sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1, 0) es $y = -3x + 3$ y que la función presenta un extremo en el punto de abscisa $x = 0$.

(Univ. del País Vasco)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\ ; \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

- la curva pasa por el punto (1, 0): $0 = a + b + c + d$ (1)
- la recta $y = -3x + 3$ es tangente a la curva en el punto (1, 0): $f'(1) = 3a + 2b + c = -3$ (2)
- el punto (1, 0) es de inflexión: $f''(1) = 6a + 2b = 0$ (3)
- la función presenta un extremo en el punto de abscisa $x = 0$: $3a\cdot 0 + 2b\cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$ (4)

Las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) forman el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 3a + 2b + c = -3 \\ 3a + b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right| \quad c = 0 \quad \left| \; b = -3,\ a = 1 \right| \quad d = 2$$

de aquí:

$$\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 + 2}$$

7.23 Dada la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx + d$ hallar los coeficientes a, b, c, d, sabiendo que la función tiene un máximo en el punto (0, 3), un mínimo para $x = 2$, y un punto de inflexión en el punto (1, 1).

(Univ. de León)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ ; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\ ; \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

- si la función tiene un máximo en el punto (0, 3):

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{ll} d = 3 & (1) \\ c = 0 & (2) \end{array}$$

— si la función tiene un mínimo en $x=2$:

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 3a\cdot 4 + 2b\cdot 2 + c = 0 \ ; \quad 12a + 4b + c = 0 \qquad (3)$$

— si la función tiene un punto de inflexión en el punto $(1, 1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f''(1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{ll} a+b+c+d = 1 & (4) \\ 6a + 2b \quad\quad = 0 & (5) \end{array}$$

Las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5) forman el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 1 \\ 12a + 4b + c \quad = 0 \\ 3a + b \quad\quad = 0 \\ d = 3 \\ c = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{a = 1,\ b = -3,\ c = 0,\ d = 3}$$

7.24 Sea $f: R \to R$ la función definida por

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \quad \text{(a y b números reales)}$$

Hallar a y b para que f sea continua y derivable en el punto $x = 0$. Para los anteriores valores de y b, analizar si la función f tiene inflexión en el punto $x = 0$.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} [-(0+h)^2 + a(0+h) + b] = b$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \operatorname{sen}(0-h) = 0$$

La función será continua en $x = 0$ si $\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(0-h) = f(0) \Rightarrow \boxed{b = 0}$

$$f'(0)^+ = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-h^2 + ah + 0 - 0}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (-h+a) = a$$

$$f'(0)^- = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\operatorname{sen}(-h) - 0}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-\operatorname{sen} h}{-h} = 1$$

La función será derivable en $x = 0$ si $f'(0)^+ = f'(0)^- \Rightarrow \boxed{a = 1}$.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \ ; \quad f'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ -2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \ ;$$

$$f''(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ \text{no existe} & \text{si } x = 0 \\ -2 & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} f''(x) > 0 & \text{para } x \to 0^- \quad (\operatorname{sen} x < 0 \text{ si } x \to 0^- \\ f''(x) < 0 & \text{para } x \to 0^+ \end{array} \right.$$

Nota: Como $f''(0)^- = \lim_{x\to 0^-} (-\operatorname{sen} x) = 0 \neq f''(0)^+ = -2$, no existe $f''(0)$.

Como existe tangente en $x = 0$, ya que existe $f'(x)$, y cambia el signo de $f''(x)$ a la derecha e izquie da de $x = 0$, la función tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

7.25 El área ocupada por una infección cutánea se desarrolla a partir del instante $t=0$ según la función:

$$f(t) = 10 + \frac{t}{t^2+1}$$

a) Calcular la superficie ocupada por la infección al principio.
b) Hallar el instante en que es máxima el área infectada y calcular dicha área.
c) Estudiar qué ocurre con el transcurso del tiempo. ¿Se estabiliza o desaparece la infección?

(Univ. de Sevilla, 1991)

a) $f(0) = 10 + \frac{0}{0+1} = \boxed{10}$

b) $f'(t) = \frac{1\cdot(t^2+1) - 2t\cdot t}{(t^2+1)^2} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$; $f'(t) = 0 \Rightarrow 1-t^2 = 0$; $t = \pm 1$

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$	10	↗	10,5	↘	

$\Rightarrow$ la función tiene un máximo en el instante $t = 1$, siendo $f(1) = 10 + \frac{1}{1+1} = 10{,}5$

c) $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(10 + \frac{t}{t^2+1}\right) = 10 + \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{t^2+1} = 10 + 0 = 0 \Rightarrow$

con el transcurso del tiempo se estabiliza la infección, sin llegar a desaparecer, ya que para $t > 0$ se verifica que $f(t) > 0$.

7.26 El consumo de un coche depende de la velocidad en km/h según la función

$$f(v) = \frac{3\,e^{0{,}011\cdot v}}{v} \text{ litros/km.}$$

a) ¿Cuál es la velocidad más económica?
b) ¿Cuantos litros por cada 100 kms. se gastarán a esta velocidad?

(Univ. de Barcelona, 1991)

a) Hay que hallar el mínimo de la función.

$$f'(v) = \frac{(3e^{0{,}011v}\,0{,}011)v - 3e^{0{,}011v}\cdot 1}{v^2} = \frac{3e^{0{,}011v}\,(0{,}011v-1)}{v^2};$$

$$f'(v) = 0 \Rightarrow e^{0{,}011v}(0{,}011v-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{0{,}011v} = 0 \quad \text{(no tiene solución)} \\ 0{,}011v - 1 = 0 \;;\; v = \frac{1}{0{,}011} = 90{,}9 \text{ km/h} \end{cases}$$

v	0		90,9		$+\infty$
$f'(v)$		−	0	+	
$f(v)$		↘	90,9	↗	

$\Rightarrow$ para $\boxed{v = 90{,}9}$ el consumo es mínimo

b) A la velocidad de 90,9 km/h se gastarán en 100 km.:

$$100\cdot f(90{,}9) = 100\cdot\frac{3e^{0{,}011\cdot 90{,}9}}{90{,}9} = 100\cdot\frac{3e}{90{,}9} = 100\cdot\frac{3\cdot 2{,}718282}{90{,}9} = \boxed{8{,}97} \text{ litros}$$

7.27 Se ha comprobado empíricamente que las ganancias que proporciona cierto juego dependen del tiempo que se esté jugando a través de la expresión:

$$G(x) = \frac{100x}{x^2+400}$$

(donde x representa el tiempo de juego expresado en minutos).

Se pide:

a) ¿Cuanto más tiempo se permanezca jugando es mayor la ganancia que se obtiene? Justifica la respuesta.

b) Determinar el tiempo de juego que proporciona la mayor ganancia.

c) ¿Puede ocurrir que si se sobrepasa cierto tiempo, el juego dé pérdidas (ganancia negativa)? ¿Por qué?

(Univ. de Oviedo, 1991)

Tenemos que estudiar el crecimiento, decrecimiento y extremos de la función $G: [0, +\infty[\to R$ definida por

$$G(x) = \frac{100x}{x^2+400}$$

$$G'(x) = \frac{100(x^2+400) - 100x \cdot 2x}{(x^2+400)^2} = \frac{100(400-x^2)}{(x^2+400)^2}$$

$$G'(x) = 0 \Rightarrow 400 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 20 \quad (-20 \text{ no es válida}).$$

x	0		20		$+\infty$
G'(x)		+	0	−	
G (x)		↗	máximo	↘	

$\Rightarrow$ Entre 0 y 20 minutos de juego las ganancias van en aumento, alcanza su mayor ganancia a los 20 minutos, y a partir de este instante empiezan a disminuir.

Como para $x \geq 0$ siempre $G(x) = \dfrac{100x}{x^2+400}$ es positivo, nunca habrá pérdidas.

7.28 Supongamos que el rendimiento r en % de un alumno en un examen de una hora viene dado por

$$r = 300\,t\,(1-t)$$

donde $0 < t < 1$ es el tiempo en horas. Se pide:

a) ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?

b) ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

c) ¿Cuándo se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

(Univ. de Valencia, 1991)

a) $\dfrac{dr}{dt} = 300 \cdot 1 \cdot (1-t) + 300\,t(-1) = 300(1-2t)$; $\quad \dfrac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow 1-2t = 0$; $t = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

t	0		0,5		1
$\frac{dr}{dt}$		+	0	−	
r		↗	máx.	↘	

De 0 a 0,5 horas el rendimiento aumenta, y de 0,5 a 1 hora el rendimiento disminuye.

b) $r = 0 \Rightarrow 300\,t\,(1-t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 1-t=0\,;\ t=1 \end{cases} \Rightarrow$ el rendimiento es nulo en el momento de empezar y terminar el examen.

c) El mayor rendimiento se obtiene cuando $t = 0{,}5$, siendo en este momento el rendimiento:

$$r = 300 \cdot 0{,}5\,(1-0{,}5) = \boxed{75\,\%}$$

7.29 Durante los treinta días consecutivos de un mes las acciones de una determinada compañía han tenido unas cotizaciones dadas por la función:

$$f(x) = 0{,}2\,x^2 - 8x + 100$$

donde x es el número de días transcurridos.

a) Halla los días en que las respectivas acciones estuvieron en baja (bajando de precio) y los que estuvieron en alza.

b) ¿Qué día del mes alcanzaron el valor máximo? ¿Y el valor mínimo?

(Univ. de León, 1991)

a) Tenemos que hallar el crecimiento y decrecimiento de la función.

$$f'(x) = 0{,}4x - 8\ ;\ f'(x) = 0 \Rightarrow 0{,}4x - 8 = 0\ ;\ x = \frac{8}{0{,}4} = 20$$

	0,2	−8	100
20		4	−80
	0,2	−4	20

	0,2	−8	100
30		6	−60
	0,2	−2	40

x	1		20		30
f'(x)		−	0	+	
f(x)	92,2	↘	20	↗	40

Del 1 al 20 las acciones estuvieros en baja, y del 20 al 30 estuvieron en alza.

b) El día 1 tuvieron el valor máximo, y el 20 el valor mínimo.

7.30 Encontrar los máximos y mínimos relativos (si es que tiene) de

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2}$$

(Univ. de Barcelona)

La función no está definida para $x = 0$.

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{x^4} = 1 - \frac{2}{x^3}\ ;\quad f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{x^3} = 0,\quad \frac{x^3-2}{x^3} = 0,\quad x^3 - 2 = 0,\quad x = \sqrt[3]{2}$$

$$f''(x) = -\frac{-2 \cdot 3 \cdot x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}\ ;\quad f''\left(\sqrt[3]{2}\right) = \frac{6}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^4} > 0 \Rightarrow$$ la función tiene un mínimo relativo en $x = \sqrt[3]{2}$ igual a $\sqrt[3]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

7.31 **Hallar los máximos y mínimos de la función f: R → R definida por**

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

(Univ. de Valencia, 1991)
(Univ. de Castilla – La Mancha)

$f'(x) = 4x^3 - 4x \ ; \quad f''(x) = 12x^2 - 4$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \ ; \ 4x(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \ ; \ x = 1, \ x = -1 \end{cases}$

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ en $x = 0$ la función tiene un máximo igual a $f(0) = 0$

$f''(1) = 12 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ la función tiene un mínimo igual a $f(1) = -1$

$f''(-1) = 12 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow$ en $x = -1$ la función tiene un mínimo igual a $f(-1) = -1$

7.32 **Hallar los máximos y mínimos relativos de la función f: R → R definida por**

$$f(x) = e^{x^3 + x^2 + 1}$$

(Univ. de Santiago)

$f'(x) = e^{x^3+x^2+1}(3x^2+2x) \ ; \ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

$f''(x) = e^{x^3+x^2+1}(3x^2+2x)^2 + e^{x^3+x^2+1}(6x+2) = e^{x^3+x^2+1}\left((3x^2+2x)^2 + (6x+2)\right)$

$f''(0) = e \cdot 2 > 0 \Rightarrow$ para $x = 0$ hay un mínimo $f(0) = e$

$f''\left(-\dfrac{2}{3}\right) = e^{\frac{31}{27}}(-2) < 0 \Rightarrow$ para $x = -\dfrac{2}{3}$ hay un máximo: $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = e^{\frac{31}{27}}$

7.33 **Decir si la gráfica de la función $f(x) = x^4 e^x$ presenta máximo, mínimo o punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$.**

(Univ. de Alicante)

$f(x) = x^4 e^x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 e^x + x^4 e^x = (4x^3 + x^4) e^x \ ; \quad f'(0) = 0$

$f''(x) = (12x^2 + 4x^3) e^x + (4x^3 + x^4) e^x = (12x^2 + 8x^3 + x^4) e^x \ ; \quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = (24x + 24x^2 + 4x^3) e^x + (12x^2 + 8x^3 + x^4) e^x = (24x + 36x^2 + 12x^3 + x^4) e^x \ ; \quad f'''(0) = 0$

$f^{(4}(x) = (24 + 72x + 36x^2 + 4x^3) e^x + (24x + 36x^2 + 12x^3 + x^4) e^x \ ; \quad f^{(4}(0) = 24 > 0$

la primera derivada no nula para $x = 0$ es de orden par y positiva, la función tiene un *mínimo* para $x = 0$.

7.34 Estudiar los máximos y mínimos de la función $f: R \rightarrow R$ definida por

$$f(x) = (x^3-4x^2+7x-6)e^x$$

(Univ. de Madrid)

$$f'(x) = (3x^2-8x+7)e^x + (x^3-4x^2+7x-6)e^x = (x^3-x^2-x+1)e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x^3-x^2-x+1)e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3-x^2-x+1 = 0 \\ e^x = 0 \end{cases}$$

La suma de los coeficientes de la ecuación $x^3-x^2-x+1 = 0$ es igual a 0, luego $x_1 = 1$ es raíz. Rebajando de grado por Rufini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow x^2-1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1,\ x_3 = -1$$

$$f(1) = (1-4+7-6)e^1 = -2e \quad ; \quad f(-1) = (-1-4-7-6)e^{-1} = \frac{-18}{e}$$

La ecuación $e^x = 0$ no tiene raices, pues una función exponencial siempre es mayor que cero.

$$f''(x) = (3x^2-2x-1)e^x + (x^3-x^2-x+1)e^x = (x^3+2x^2-3x)e^x$$

$$f''(-1) = (-1+2+3)e^{-1} = \frac{4}{e} > 0 \Rightarrow$$ f tiene un *mínimo* en $x = -1$.

$f''(1) = (1+2-3)e = 0$; hay que hallar $f'''(1)$

$$f'''(x) = (3x^2+4x-3)e^x + (x^3+2x^2-3x)e^x = (x^3+5x^2+x-3)e^x \Rightarrow$$

$f'''(1) = 4e > 0 \Rightarrow$ f tiene *un punto de inflexión, con tangente horizontal* en $x = 1$.

7.35 Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto de área total 150 cm^2 y volumen máximo. Determina su generatriz y su radio.

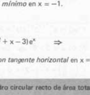
(Univ. de Salamanca)

Sea x el radio de la base, e y la altura del cilindro.

El área total es igual al área lateral $(2\pi x y)$ más el área de las dos bases $(2 \cdot \pi x^2)$:

$$2\pi x y + 2\pi x^2 = 150 \qquad (1)$$

El volumen del cilindro es igual al área de la base, πx^2, por la altura, y:



$$V = \pi x^2 y \qquad (2)$$

De (1): $y = \dfrac{75-\pi x^2}{\pi x}$,

llevando este valor a (2):

$$V = \pi x^2 \, \frac{75-\pi x^2}{\pi x} = 75x - \pi x^3 \Rightarrow V' = 75 - 3\pi x^2 \ ; \ V' = 0 \Rightarrow 75 - 3\pi x^2 = 0 \, ;$$

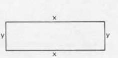
$$x = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \approx \boxed{2,82\ \text{cms.}} \quad ; \quad y = \frac{75 - \pi\,(2'82)^2}{\pi \cdot 2'82} \approx \boxed{5,65\ \text{cms.}}$$

$V'' = -6\,\pi\,x \ \Rightarrow\ V''\left(\frac{5}{\sqrt{\pi}}\right) < 0 \ \Rightarrow$ los valores hallados corresponden a un máximo.

7.36 **Con un alambre de 4 metros se quiere construir el borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones hay que dar al rentángulo?**

(Univ. de Valencia, 1992)

Sean x e y las dimensiones del rectángulo:



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 4 \\ S = x \cdot y \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} y = 2 - x \\ S = x\,(2 - x) = 2x - x^2 \end{array}$$

$S' = 2 - 2x \ ;\ \ S' = 0 \ \Rightarrow 2 - 2x = 0 \ ;\ x = 1$

Como $S'' = -2 < 0$, para $x = 1$ tenemos un máximo.

Las dimensiones son $x = 1$, $y = 2 - 1 = 1$, o sea el área será máxima cuando el rectangulo es un cuadrado.

7.37 **Una piedra preciosa pesa 12 gramos. Sabiendo que el valor de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su peso y que su valor es de 144 000 ptas, calcular, cuando dicha piedra se divide en dos trozos, el valor de cada uno de ellos cuando la depreciación sea máxima.**

(Univ. de Santiago de Compostela, 1991)
(Univ. de Madrid)

Valor de la piedra antes de romperse: $k \cdot 12^2 = 144000 \ \Rightarrow\ k = 1000$

Sea x gramos el peso de uno de los trozos, el peso del otro será $(12 - x)$ gramos. El valor de los dos trozos de la piedra será

$V = 1000\,x^2 + 1000\,(12 - x)^2;\ \ V' = 2000x + 2000\,(12 - x)(-1) = 2000\,(2x - 12)\ ;$

$V' = 0 \ \Rightarrow 2x - 12 = 0\ ;\ x = 6\ ;\ \ V'' = 2000 \cdot 2 > 0 \ \Rightarrow$ cuando $x = 6$, o sea, cuando la piedra se rompe en dos trozos iguales el valor es mínimo, la depreciación es máxima.

Valor de cada trozo: $1000 \cdot 6^2 = \boxed{36000\ \text{pesetas}}$

7.38 **El propietario de un inmueble tiene alquilados los cuarenta pisos del mismo a 10000 ptas. al mes cada uno. Por cada mil pesetas de aumento en el precio del alquiler pierde un inquilino, que se traslada a otro piso más económico. ¿Cuál es el alquiler que más beneficio produce al propietario?**

(Univ. de Navarra, 1991)

Si aumenta el alquiler en $1000 \cdot x$ pesetas al mes, tendrá alquilados $(40 - x)$ pisos. El beneficio obtenido es:

$B = (10000 + 1000 \cdot x)\,(40 - x)$

Hay que hallar x para que B sea máximo:

$B' = 1000\,(40-x) + (10000 + 1000\,x)(-1) = 30000 - 2000x$

$B' = 0 \Rightarrow 30000 - 2000x = 0\ ;\ x = 15$

$B'' = -2000 < 0 \Rightarrow$ para $x = 15$ el valor de B es máximo.

El alquiler que más beneficio produce es $10000 + 1000 \cdot 15 = \boxed{25000 \text{ pts.}}$

7.39 Una peña deportiva fundada en 1987 tiene x años después de su fundación

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 24x - 48)$$

miembros.

a) ¿En qué año tuvo el máximo número de miembros, entre 1987 y 1992?
b) ¿Cuál es la tendencia actual, en 1992, creciente o decreciente?
c) ¿Llegará a quedarse sin ningún socio?

(Univ. de Cantabria, 1992)

a) $f'(x) = -\frac{1}{3}(3x^2 - 18x + 24) = -x^2 + 6x - 8\ ;$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$f''(x) = -2x + 6 \quad \begin{cases} f''(4) = -8 + 6 = -2 < 0 \Rightarrow \text{para } x = 4 \text{ existe un máximo} \\ f''(2) = -4 + 6 = 2 > 0 \Rightarrow \text{para } x = 2 \text{ existe un mínimo} \end{cases}$$

La peña tuvo el máximo número de miembros cuatro años después de su fundación, en 1991.

b)
$$\begin{array}{r|rrr} & -1 & 6 & -8 \\ 5 & & -5 & 5 \\ \hline & -1 & 1 & -3 \end{array} \Rightarrow f'(5) = -3 < 0 \Rightarrow \text{la tendencia en el año 1992 es decreciente.}$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & -\frac{1}{3} & 3 & -8 & 16 \\ 3 & & -1 & 6 & -6 \\ \hline & -\frac{1}{3} & 2 & -2 & 10 \end{array} \Rightarrow f(3) = 10 \qquad \begin{array}{r|rrrr} & -\frac{1}{3} & 3 & -8 & 16 \\ 9 & & -3 & 0 & -72 \\ \hline & -\frac{1}{3} & 0 & -8 & -56 \end{array} \Rightarrow f(9) = -56$$

La función, por ser polinómica, es continua es el intervalo $[3, 9]$, y como $f(3) \cdot f(9) < 0$, según el teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c \in \,]3, 6[$ tal que $f(c) = 0$. O sea que la peña llegará a quedarse sin ningún socio.

7.40 Calcular la ecuación de la tangente a la curva

$$y = 2x^3 - 6x^2 + 4$$

en su punto de inflexión.

(Univ. de Santiago)
(Univ. de Sevilla)

El valor de la abscisa del punto de inflexión es el que anula la segunda derivada (y no anula la tercera derivada):

$$y' = 6x^2 - 12x \;;\; y'' = 12x - 12 \;;\; y''' = 12$$

$y'' = 0 \Rightarrow 12x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1$, como para $x = 1$, y vale: $2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 = 0$, el punto de inflexión es el $(1, 0)$.

Para $x = 1$, y' vale: $6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 = -6$, de donde la ecuación de la tangente es

$$y - 0 = -6(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -6x + 6}$$

7.41 **Calcular las ecuaciones de las tangentes a la curva**

$$y = 4x^3 - 2x^2 - 10$$

en los puntos de inflexión y de máximo o mínimo relativo.

(Univ. de Córdoba)

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 10 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x \;;\; f''(x) = 24x - 4 \;;\; f'''(x) = 24$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\; x_2 = \frac{1}{3}$$

$f''(0) = -4 < 0$, la curva tiene en el punto de abscisa 0 un máximo igual a $f(0) = -10$.

$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 24 \cdot \frac{1}{3} - 4 = 4 > 0$, la curva tiene en el punto de abscisa $\frac{1}{3}$, un mínimo igual a $f\left(\frac{1}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{27} - 2 \cdot \frac{1}{9} - 10 = -\frac{272}{27}$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 24x - 4 = 0 \;;\; x = \frac{1}{6} \;;\; f'''\left(\frac{1}{6}\right) = 24 \neq 0 \Rightarrow$ la curva tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $\frac{1}{6}$.

Si existe f'(a), la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

de donde:

– tangente en el punto $(0, -10)$: $y - (-10) = 0 \cdot (x - 0)$; $\boxed{y + 10 = 0}$

– " " " " $\left(\frac{1}{3}, -\frac{272}{2}\right)$: $y - \left(-\frac{272}{27}\right) = 0 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$; $\boxed{y + \frac{272}{27} = 0}$

– " " " " $\left(\frac{1}{6}, f\left(\frac{1}{6}\right)\right) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{271}{27}\right)$: $y - \left(-\frac{271}{27}\right) = \left(12 \cdot \frac{1}{36} - 4 \cdot \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{1}{6}\right)$;

$$\boxed{y + \frac{271}{27} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)}$$

7.42 **Hallar el valor de b y m para que la curva**

$$y = x^3 + bx^2 + mx + 1$$

tenga en el punto (0, 1) una inflexión y la pendiente de la recta tangente valga 1.

(Univ. de Alicante, 1991)

$$y' = 3x^2 + 2bx + m \quad ; \quad y'' = 6x + 2b \quad ; \quad y''' = 6$$

– la curva tiene en el punto (0, 1) una inflexión: $f''(0) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 0 + 2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

– la pendiente de la tangente en (0, 1) vale 1: $f'(0) = 1 \Rightarrow 1 = 3 \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + m \Rightarrow \boxed{m = 1}$

7.43 Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$

Hallar a y b de manera que la curva $y = f(x)$ tenga para $x = 1$ una inflexión con tangente horizontal.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad ; \quad f''(x) = 6x + 2a \quad ; \quad f'''(x) = 6$$

Si la curva $y = f(x)$ tiene para $x = 1$ un punto de inflexión, $f''(1) = 0$; y si para $x = 1$ tiene un punto de tangente horizontal, $f'(1) = 0$, o sea:

$$\left.\begin{array}{l} 6 \cdot 1 + 2a = 0 \\ 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \boxed{a = -3} \\ 3 + 2(-3) + b = 0 \ ; \ \boxed{b = 3} \end{array}$$

7.44 **Una población de insectos crece con arreglo a la siguiente ley:** $y = 1 + 2e^x$

donde y es el número de miles de insectos y x es el tiempo en meses desde el momento presente.

a) **Haz una gráfica de la función de crecimiento.**

b) **¿En cuánto tiempo se duplicará la población inicial $(x = 0)$?**

c) **¿En cuánto tiempo se duplicará la población existente después del primer mes?**

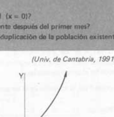
d) **Expresa la función D(x) que calcula el tiempo de duplicación de la población existente en el instante x.**

(Univ. de Cantabria, 1991)

a) $x = 0 \Rightarrow y = 1 + 2e^0 = 1 + 2 = 3$

$y' = 2e^x > 0$ para todo x, la función es creciente en todos sus puntos.

$y'' = 2e^x > 0 \Rightarrow$ la función es convexa.



b) Como la población inicial es 3000 insectos (para $x = 0$, $y = 3$ en miles), si la población se duplica al cabo de x meses:

$$1 + 2e^x = 6 \Rightarrow e^x = \frac{6-1}{2} = 2{,}5 \Rightarrow x \cdot \log e = \log 2{,}5 \ ; \ x = \log 2{,}5 = \boxed{0{,}916291} \text{ meses}$$

c) Al final del primer mes, la población será: $1 + 2e^1 = 1 + 2 \cdot 2{,}718282 = 6{,}437$

Si t es el tiempo en el que la población de insectos es doble de la que hay al final del primer mes:

$$1 + 2e^t = 2 \cdot 6{,}437 \Rightarrow e^t = \frac{12{,}874 - 1}{2} = 5{,}973 \Rightarrow t = \log 5{,}973 = \boxed{1{,}787249} \text{ meses.}$$

d) Si en el instante T, la población es doble que en el instante x, se verificará:

$$1 + 2e^T = 2(1 + 2e^x) \Rightarrow e^T = \frac{4e^x + 1}{2} \Rightarrow T = \boxed{D(x) = \log \frac{4e^x + 1}{2}}$$

CAPITULO 8

REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES DADAS EN FORMA EXPLICITA

REPRESENTACION GRAFICA DE UNA FUNCION DADA EN FORMA EXPLICITA.

Para dibujar la curva (C) de la función $f:\ x \to y = f(x)$ estudiaremos sucesivamente los siguientes puntos:

1º) CAMPO DE EXISTENCIA O CONJUNTO DE DEFINICION.

Es el subconjunto $D \subset R$, formado por los valores reales de x para los que y es real.

☆ $y = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ no está definida para los valores de x que anulan el denominador.

Sea f la función definida por $y = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$; $D = R - \{-2, 2\}$; $y = \dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x+2} \Rightarrow$ la curva de f es la curva de la función: $R - \{-2, 2\} \to R$ definida por $y = \dfrac{1}{x+2}$

☆ $y = \sqrt[2n]{g(x)}$ está definida sólamente para los valores de x que hacen $g(x) \geqslant 0$.

Se $y = \sqrt{-x^2 - x + 2}$; $-x^2 - x + 2 = 0$, $x^2 + x - 2$; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$; $y = \sqrt{-(x-1)(x+2)}$

$D = [-2, 1]$

$-(x-1)(x+2)$	$-$		$+$		$-$
x		-2		1	

Si $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - x + 2}}$; $D =]-2, 1[$

☆ $y = \log_a g(x)$ está definida sólamente para los valores de x que hacen $g(x) > 0$.

Sea $y = \log \sqrt{-x^2 - x + 2}$; $D =]-2, 1[$

☆ $y = \text{arc sen}\, g(x)$
☆ $y = \text{arc cos}\, g(x)$
$\Bigg|$ está definida sólamente para los valores de x que hacen $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1$.

Sea $y = \text{arc sen}\,(x+2)$; $-1 \leqslant x + 2 \leqslant 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x + 2\ ; & x \geqslant -3 \\ x + 2 \leqslant 1\ ; & x \leqslant -1 \end{cases} \Rightarrow D = [-3, -1]$

2º) SIMETRIAS Y PERIODICIDAD

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Si D es el conjunto de definición, para estudiar f es suficiente hacerlo en el conjunto $E = D \cap [0, +\infty[$. Dibujada la curva correspondiente a E, se dibuja su simétrica respecto del origen de coordenadas y tendremos toda la curva.

Sea $y = \frac{3x}{x^2+1}$: $f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-3x}{x^2+1} = -\frac{3x}{x^2+1} = -f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del origen de coordenadas. Sólo hay que estudiarla en R_+.

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del eje OY.

Si D es el conjunto de definición, basta hacer el estudio en el conjunto $E = D \cap [0, +\infty[$.

Sea $y = \frac{x^2-1}{x^4+1}$: $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^4+1} = \frac{x^2-1}{x^4+1} = f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del eje OY. Sólo hay que estudiarla en R^+.

Para comprobar que una curva no tiene simetrías respecto del origen ni respecto del eje OY (la función no es impar ni par), basta ver que, siendo a un punto cualquiera de D, se tiene que $f(-a) \neq f(a)$ y $f(-a) \neq -f(a)$.

Sea $y = x^2 + 3x$: $f(1) = 4$, $f(-1) = -2 \Rightarrow$ la curva no tiene simetrías respecto del punto (0,0), ni respecto del eje OY.

Si la función es periódica, es decir, si $\forall x \in D$ existe un número real T no nulo tal que: $f(x+T) = f(x)$, basta estudiar la curva en el conjunto $E = D \cap [a, a+T]$, donde $a \in D$, y trasladando la curva obtenida a los intervalos $[a + kT, a + (k+1)T]$, $k \in Z^*$, tendremos la curva pedida.

Las funciones $x \mapsto \operatorname{sen}(ax+b)$ y $x \mapsto \cos(ax+b)$, $a \neq 0$, tienen por periodo $T = \frac{2\pi}{|a|}$, y la función $x \mapsto \operatorname{tg}(ax+b)$, $a \neq 0$, tiene por periodo $T = \frac{\pi}{|a|}$

Si **h** y **g** son dos funciones periódicas de periodos respectivos T_1 y T_2, la función **f = h + g** es una función periódica, cuyo periodo se obtiene del siguiente modo:

Se escribe $\frac{T_1}{T_2}$ como una fracción irreducible $\frac{a}{b}$: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{a}{b}$, $T = aT_2 = bT_1$ es el periodo de **f**.

El mismo método se sigue si $f = g \cdot h$. El periodo será $T = aT_2 = bT_1$ o un divisor de T.

La función $x \mapsto \operatorname{sen} 2x$ tiene por periodo $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ y la función $x \mapsto \cos 3x$ tiene por periodo $T_2 = \frac{2\pi}{3}$.

La función $x \mapsto \operatorname{sen} 2x + \cos 3x$ es periódica, su periodo se obtiene así:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow T = 2T_1 = 3T_2 = 2\pi$$

3º) CORTE CON LOS EJES.

$x = 0 \Rightarrow y = f(0)$

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, las abscisas de los puntos de corte son las raices de esta ecuación.

$y = \sqrt[n]{g(x)}$; $y = 0 \Rightarrow g(x) = 0$	$y = \operatorname{tg} g(x)$; $y = 0 \Rightarrow g(x) = k\pi$
$y = \log g(x)$; $y = 0 \Rightarrow g(x) = 1$	$y = \operatorname{arc\,sen} g(x)$; $y = 0 \Rightarrow g(x) = 0$
$y = \operatorname{sen} g(x)$; $y = 0 \Rightarrow g(x) = k\pi$	$y = \operatorname{arc\,cos} g(x)$, $y = 0 \Rightarrow g(x) = 1$
$y = \cos g(x)$; $y = 0 \Rightarrow g(x) = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$	$y = \operatorname{arc\,tg} g(x)$, $y = 0 \Rightarrow g(x) = 0$

4º) ASINTOTAS.

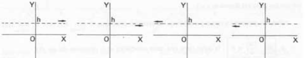
Se dice que una curva tiene ramas infinitas si existen puntos de la curva cuya distancia al origen coordenadas es mayor que cualquier número prefijado. Si una curva tiene ramas infinitas, la recta existe) a la cual se aproxima la curva cada vez más sin llegar a tocarla, se llama *asíntota*. (Incorrectam te se dice que la asíntota es la tangente a la curva en su punto del infinito). Si la curva no tiene asíntot se dice que la curva tiene una *rama parabólica*.

Asíntotas horizontales o paralelas al eje OX. Son de la forma:

$$\boxed{y = h}\ ,\ \text{siendo}\ h = \lim_{x\to\infty} f(x)\ ,\quad (h \in R)$$

La curva $y = \frac{3x}{x-1}$ tiene una asíntota horizontal, la recta de ecuación $y = 3$, ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$.

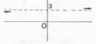
Es muy conveniente estudiar la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal $y = h$, ba tará hallar el signo de $f(x) - h$ para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, si $f(x) - h > 0$ la curva estará por encima la asíntota y si $f(x) - h < 0$ la curva estará por debajo de la asíntota.



$\underset{x\to+\infty}{f(x) - h > 0}$ $\underset{x\to+\infty}{f(x) - h < 0}$ $\underset{x\to-\infty}{f(x) - h > 0}$ $\underset{x\to-\infty}{f(x) - h < 0}$

Veamos la posición de la curva $y = \frac{3x}{x-1}$ respecto de la asíntota $y = 3$:

$$f(x) - 3 = \frac{3x}{x-1} - 3 = \frac{3x - 3x + 3}{x-1} = \frac{3}{x-1} \begin{cases} > 0 & \text{para } x \to +\infty \\ < 0 & \text{" } x \to -\infty \end{cases}$$



En ciertas funciones, por ejemplo en las exponenciales, hay que hallar por separado el límite de f(para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, ya que ambos límites pueden ser distintos:

Sea $y = x \cdot e^{-x}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal por la derecha.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x e^{-x} = (-\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty) \Rightarrow$ no hay asíntota horizontal por la izquierda.

Asíntotas verticales o paralelas al eje OY: Son de la forma $\boxed{x = k}$ siendo k los valores finitos x que hacen y infintito.

Si $y = \frac{g(x)}{h(x)}$ ó $y = \sqrt{\frac{g(x)}{h(x)}}$, k son las raices de $h(x) = 0$.

Si $y = \log \frac{g(x)}{h(x)}$, k son las raices de $g(x) = 0$, y las raices de $h(x) = 0$.

Es muy conveniente estudiar la posición de la curva respecto de la asíntota vertical $y = k$, viendo signo de $f(k - \epsilon)$ y $f(k + \epsilon)$, cuando ϵ tiende a 0.

4º) ASINTOTAS.

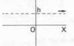
Se dice que una curva tiene ramas infinitas si existen puntos de la curva cuya distancia al origen de coordenadas es mayor que cualquier número prefijado. Si una curva tiene ramas infinitas, la recta (si existe) a la cual se aproxima la curva cada vez más sin llegar a tocarla, se llama *asíntota*. (Incorrectamente se dice que la asíntota es la tangente a la curva en su punto del infinito). Si la curva no tiene asíntotas, se dice que la curva tiene una *rama parabólica*.

Asíntotas horizontales o paralelas al eje OX. Son de la forma:

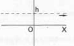
$$\boxed{y = h}\ , \text{ siendo } h = \lim_{x \to \infty} f(x)\ , \quad (h \in \mathbf{R})$$

La curva $y = \dfrac{3x}{x-1}$ tiene una asíntota horizontal, la recta de ecuación $y = 3$, ya que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x}{x-1} = 3$.

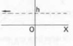
Es muy conveniente estudiar la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal $y = h$, bastará hallar el signo de $f(x) - h$ para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, si $f(x) - h > 0$ la curva estará por encima de la asíntota y si $f(x) - h < 0$ la curva estará por debajo de la asíntota.



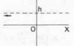
$\underset{x \to +\infty}{f(x) - h > 0}$



$\underset{x \to +\infty}{f(x) - h < 0}$



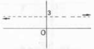
$\underset{x \to -\infty}{f(x) - h > 0}$



$\underset{x \to -\infty}{f(x) - h < 0}$

Veamos la posición de la curva $y = \dfrac{3x}{x-1}$ respecto de la asíntota $y = 3$:

$$f(x) - 3 = \frac{3x}{x-1} - 3 = \frac{3x - 3x + 3}{x-1} = \frac{3}{x-1} \begin{cases} > 0 & \text{para } x \to +\infty \\ < 0 & \text{"} \quad x \to -\infty \end{cases}$$



En ciertas funciones, por ejemplo en las exponenciales, hay que hallar por separado el límite de $f(x)$ para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, ya que ambos límites pueden ser distintos:

Sea $y = x \cdot e^{-x}$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal por la derecha.

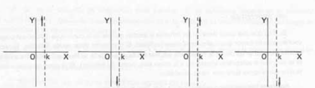
$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{-x} = (-\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty) \Rightarrow$ no hay asíntota horizontal por la izquierda.

Asíntotas verticales o paralelas al eje OY: Son de la forma $\boxed{x = k}$ siendo k los valores finitos de x que hacen y infintito.

Si $y = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ ó $y = \sqrt{\dfrac{g(x)}{h(x)}}$, k son las raices de $h(x) = 0$.

Si $y = \log \dfrac{g(x)}{h(x)}$, k son las raices de $g(x) = 0$, y las raices de $h(x) = 0$.

Es muy conveniente estudiar la posición de la curva respecto de la asíntota vertical $y = k$, viendo el signo de $f(k - \epsilon)$ y $f(k + \epsilon)$, cuando ϵ tiende a 0.

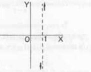


$f(k-\epsilon) > 0$ $\quad$ $f(k-\epsilon) < 0$ $\quad$ $f(k+\epsilon) > 0$ $\quad$ $f(k+\epsilon) < 0$

Sea la curva $y = \dfrac{3x}{x-1}$, $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ es asíntota vertical.

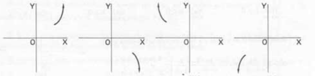
$f(1-\epsilon) = \dfrac{3(1-\epsilon)}{(1-\epsilon)-1} = \dfrac{3(1-\epsilon)}{-\epsilon} < 0 \Rightarrow$ la curva se acerca a la asíntota por debajo a la izquierda de $x = 1$.

$f(1+\epsilon) = \dfrac{3(1+\epsilon)}{(1+\epsilon)-1} = \dfrac{3(1+\epsilon)}{\epsilon} > 0 \Rightarrow$ la curva se acerca a la asíntota por arriba a la derecha de $x = 1$.



Asíntotas generales y ramas parabólicas. Se estudian solamente si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ ó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

— si $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty}$, la curva tiene una *rama parabólica en la dirección del eje OY*.

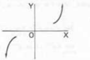


$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

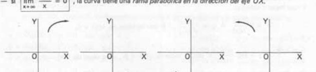
Sea $y = \dfrac{x^3}{x-1}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = -\infty$$



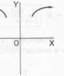
— si $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0}$, la curva tiene una *rama parabólica en la dirección del eje OX*.



$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0^{+}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0^{-}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0^{+}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0^{-}$

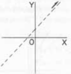
Sea $y = \log(x^2+1)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x^2+1)}{x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = 0^+$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\log(x^2+1)}{x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = 0^-$

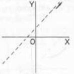


— si $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0 \;\text{ y }\; \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = b}$, la curva tiene la asíntota $\boxed{y = mx + b}$

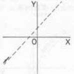
La posición de la curva respecto de la asíntota se estudia hallando el signo, para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, de $f(x) - mx - b$:



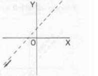
$\underset{x\to+\infty}{f(x)-mx-b > 0}$



$\underset{x\to+\infty}{f(x)-mx-b < 0}$



$\underset{x\to-\infty}{f(x)-mx-b > 0}$



$\underset{x\to-\infty}{f(x)-mx-b < 0}$

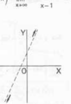
Sea $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2}{x^2-x} = 2$; $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - 2x] = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2}{x-1} - 2x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-2x^2+2x}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2x+2$ es asíntota oblícua.

Posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - mx - b = \frac{2x^2}{x-1} - 2x - 2 = \frac{2x^2-2x^2+2x-2x+2}{x-1} =$$

$$= \frac{2}{x-1} \left| \begin{array}{l} > 0 \text{ si } x \to +\infty \\ < 0 \text{ si } x \to -\infty \end{array} \right.$$



Los punto de corte de la curva y de la asíntota se obtienen resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ y = mx + b \end{array}\right|$$

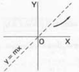
En el ejemplo anterior:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2x^2}{x-1} \\ y = 2x+2 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{2x^2}{x-1} = 2x+2\,;\; 2x^2 = 2x^2 - 2x + 2x - 2 \Rightarrow 0 = -2 \;\text{(absurdo)} \Rightarrow$$

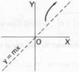
la curva no corta a la asíntota.

— si $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \infty}$, la curva tiene una *rama parabólica en la dirección de la recta $y = mx$.*

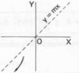
El signo de $f''(x)$ para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$ nos dará la convexidad o concavidad de la curva en la rama parabólica, lo que nos facilitará su dibujo.



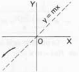
$f''(x)_{x\to+\infty} > 0$



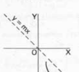
$f''(x)_{x\to+\infty} < 0$



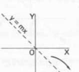
$f''(x)_{x\to-\infty} > 0$



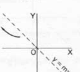
$f''(x)_{x\to-\infty} < 0$



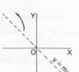
$f''(x)_{x\to+\infty} > 0$



$f''(x)_{x\to+\infty} < 0$



$f''(x)_{x\to-\infty} > 0$



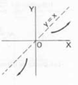
$f''(x)_{x\to-\infty} < 0$

Sea $y = x + \frac{3}{x} - \log x^2$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{\log x^2}{x}\right) = 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^2}{x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} 1 - \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{1} = 1 - 0 = 1$

$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} [x + \frac{3}{x} - \log x^2 - x] = \lim_{x\to\infty} (\frac{3}{x} - \log x^2) = 0 - \infty = -\infty$

$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2x}{x^2} = 1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$; $f''(x) = -\frac{-6x}{x^4} - \frac{-2}{x^2} = \frac{6+2x}{x^3}$

$f''(x) = \frac{6+2x}{x^3} > 0$ para $x \to +\infty$ y para $x \to -\infty$ $\Rightarrow$



las ramas parabólicas son convexas.

MAXIMOS Y MINIMOS. INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.

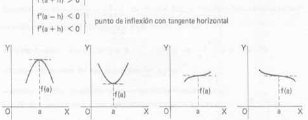
Para hallar los máximos y mínimos se obtienen las raíces de la ecuación $f'(x) = 0$, y los puntos en los que no existe $f'(x)$. Tendremos así los posibles puntos donde la función puede tener máximos y mínimos. Dichos puntos son también los posibles extremos de los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.

Si a es una raíz de $f'(x) = 0$, en el punto $(a, f(a))$ la curva tendrá un máximo o mínimo, o un punto de inflexión con tangente horizontal según sea par o impar la primera derivada no nula de orden $\geqslant 2$, es decir:

$$f'(a) = 0 \begin{cases} f''(a) < 0 \text{ máximo} \\ f''(a) > 0 \text{ mínimo} \\ f''(a) = 0 \begin{cases} f'''(a) \neq 0 \quad \text{punto de inflexión con tangente horizontal} \\ f'''(a) = 0 \begin{cases} f^{4}(a) < 0 \text{ máximo} \\ f^{4}(a) > 0 \text{ mínimo} \\ f^{4}(a) = 0 \begin{cases} f^{5}(a) \neq 0 \text{ punto inflexión con tg. hor.} \\ f^{5}(a) = 0 \ldots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Si f''(a) no existe, o su cálculo es complicado, se estudian los máximos y mínimos con la primera derivada, considerando la propiedad de que si f'(x) es positiva en un punto la función es creciente en ese punto, y si es negativa es decreciente:

$$f'(a) = 0 \begin{cases} \left.\begin{matrix} f'(a-h) > 0 \\ f'(a+h) < 0 \end{matrix}\right\} \text{máximo} \\ \left.\begin{matrix} f'(a-h) < 0 \\ f'(a+h) > 0 \end{matrix}\right\} \text{mínimo} \\ \left.\begin{matrix} f'(a-h) > 0 \\ f'(a+h) > 0 \end{matrix}\right\} \text{punto de inflexión con tangente horizontal} \\ \left.\begin{matrix} f'(a-h) < 0 \\ f'(a+h) < 0 \end{matrix}\right\} \text{punto de inflexión con tangente horizontal} \end{cases}$$



$f'(a-h) > 0$	$f'(a-h) < 0$	$f'(a-h) > 0$	$f'(a-h) < 0$
$f'(a+h) < 0$	$f'(a+h) > 0$	$f'(a+h) > 0$	$f'(a+h) < 0$

Para el estudio de los intervalos de crecimiento y decrecimiento véase el principio de la parte teórica del capítulo 11.

PUNTOS DE INFLEXION. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.

(Véase el resumen teórico del capítulo 8).

8.1 Representar la función $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

(Univ. de Santiago)

Campo de definición: La función no está definida para $x = -1$ (no se puede dividir por 0). El campo de definición es $R - \{-1\}$.

Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{-x+1} = \dfrac{x^2}{-x+1} \Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$. La curva no es simétrica ni respecto del eje OY ni respecto al origen de coordenadas.

Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$. $\quad y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x+1} = 0$; $x = 0$.

Asíntotas horizontales: No hay, puesto que $\lim\limits_{x \to \infty} y = \infty$.

Asíntotas verticales: La asíntota vertical es la recta de ecuación $x = -1$.

Estudio de la posición de la curva respecto de la asíntota $x = -1$:

$$\lim_{x \to 1^-} y = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{(1-h)^2}{(1-h)-1} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{(1-h)^2}{-h} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} y = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{(1+h)^2}{(1+h)-1} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{(1+h)^2}{h} = +\infty$$

Asíntotas generales u oblicuas:

$$y = mx + b \quad \begin{cases} m = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \\[2ex] b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - mx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - x\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \end{cases}$$

La asíntota general es la recta de ecuación $y = x - 1$.

Estudio de la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$y_{curva} - y_{asíntota} = \frac{x^2}{x+1} - (x-1) = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

para $x \to +\infty$: $\frac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow$ la curva queda por encima de la asíntota.

" $x \to -\infty$: $\frac{1}{x+1} < 0 \Rightarrow$ la curva queda por debajo de la asíntota.

Máximos y mínimos: $f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$;

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(2x+2)(x+1) - 2(x^2+2x)}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0$; $x^2+2x = 0$; $x(x+2) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2$;

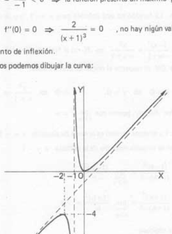
$f(0) = 0$, $f(-2) = \frac{4}{-1} = -4$.

$f''(0) = \frac{2}{1} > 0 \Rightarrow$ la función presenta un mínimo para $x = 0$.

$f''(-2) = \frac{2}{(-2+1)^3} = \frac{2}{-1} < 0 \Rightarrow$ la función presenta un máximo para $x = -2$.

Puntos de inflexión: $f''(0) = 0 \Rightarrow \frac{2}{(x+1)^3} = 0$, no hay nigún valor de x que anule la segunda derivada. No hay punto de inflexión.

Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva:



8.2 Representar la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

determinando sus simetrías, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.

(Univ. de Salamanca)

Campo de existencia: La función no está definica para $x = 1$ y $x = -1$, valores de x para los que se anula el denominador. El campo de existencia es: $R - \{-1, 1\}$.

Simetrías: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\dfrac{x^3}{1-x^2} = -f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del origen de coordenadas.

Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow x^3 = 0$, $x = 0$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \infty \Rightarrow$ no hay asíntotas horizontales.

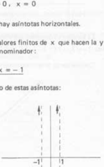
Asíntotas verticales: Son de la forma $x = k$, siendo k los valores finitos de x que hacen la y infinita. En las funciones racionales se obtienen haciendo cero el denominador:

$$1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \ ; \ \underline{x = 1}\ , \ \underline{x = -1}$$

Estudiemos la posición de la curva $y = \dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)}$ respecto de estas asíntotas:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(1-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1-h)^3}{(1-1+h)(1+1-h)} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1-h)^3}{h(2-h)} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(1+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1+h)^3}{(1-1-h)(1+1+h)} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1+h)^3}{-h(2+h)} = -\infty$$



De la simetría de la curva respecto del origen se deduce la posición de la curva respecto de la asíntota $x = -1$.

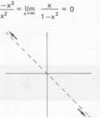
Asíntotas oblicuas:

$$y = mx + b \begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1-x^2} = -1 \\[2ex] b = \lim\limits_{x\to\infty} (y - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{1-x^2} + x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x-x^3}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{1-x^2} = 0 \end{cases}$$

$\underline{y = -x}$ es asíntota.

Estudiemos la posición de la curva respecto de esta asíntota:

$$(y_{curva} - y_{asintota}) = \frac{x^3}{1-x^2} + x = \frac{x}{1-x^2} < 0 \ \text{ para } x \to +\infty,$$



la curva está por debajo de la asíntota para $x \to +\infty$.

Por la simetría de la curva, para $x \to -\infty$ la curva queda por encima de la asíntota.

Máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2)-x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2} \quad ; \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(3-x^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

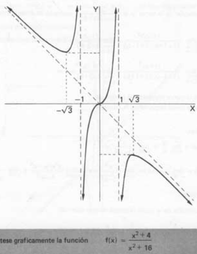
$$\begin{cases} x = 0 \\ 3-x^2=0 \; ; \quad x = \pm\sqrt{3} \; ; \quad f(\sqrt{3}) = \dfrac{(\sqrt{3})^3}{1-3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{-2} \; ; \qquad f(-\sqrt{3}) = \dfrac{(-\sqrt{3})^3}{1-3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Para $x \neq \pm 1$: $$f'(x) = \frac{x^2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(1-x)^2(1+x)^2}.$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	mínimo	↗		↗		↗	máximo	↘	

La función es decreciente en los intervalos $]-\infty, -\sqrt{3}[$ y $]\sqrt{3}, +\infty[$, y creciente en los intervalos $]-\sqrt{3}, -1[$; $]-1, 1[$ y $]1, \sqrt{3}[$.

Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva.



8.3 Represéntese graficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+16}$

Estúdiese su continuidad y derivabilidad.

(Univ. de Cádiz)

Las funciones $g: R \to R$ definida por $g(x) = x^2+4$, y $j: R \to R$ definida por $j(x) = x^2+16$, por ser funciones polinómicas, son continuas y derivables en todos sus puntos, y como $j(x)$ no se anula para ningún valor real de x, la función f definida por $f(x) = \frac{g(x)}{j(x)}$ es continua y derivable para todo valor real de x.

Simetrías: $f(-x) = \frac{(-x)^2+4}{(-x)^2+16} = \frac{x^2+4}{x^2+16} = f(x) \Rightarrow$ la curva es simétrica respecto del eje OY.
El estudio queda reducido a los valores de $x \geq 0$.

Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$; $y = 0 \Rightarrow x^2+4 = 0$, $x^2 = -4$, sin solución real.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+4}{x^2+16} = 1 \Rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal

$y_{curva} - y_{asíntota} = \frac{x^2+4}{x^2+16} - 1 = \frac{-12}{x^2+16} < 0 \Rightarrow$ la curva queda por debajo de la asíntota.

Asíntotas verticales: Como $x^2+16 = 0$ no tiene raices reales, no hay ningún valor finito de x que haga la y infinita. No hay asíntotas verticales.

Asíntotas generales: Como hay asíntotas horizontales, no hay asíntotas oblicuas.

Máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+16) - 2x(x^2+4)}{(x^2+16)^2} = \frac{24x}{(x^2+16)^2} \ ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	mínimo	↗

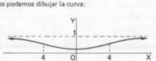
Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{24(x^2+16)^2 - 2(x^2+16)\cdot 2x \cdot 24x}{(x^2+16)^4} = \frac{-24(3x^2-16)}{(x^2+16)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 16 = 0; \quad x = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$		$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	cóncava	p. inf.	convexa	p. inf.	cóncava

Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva:



8.4 Representar gráficamente la función $y = \dfrac{x}{x^2-5x+4}$

(Univ. de Santiago)

Campo de existencia:

$$x^2-5x+4=0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow x^2-5x+4 = (x-1)(x-4)$$

la función no está definida para $x = 1$ y $x = 4$, valores de x que anulan el denominador.

Corte con los ejes: $x = 0$, $y = 0$; $y = 0$, $x = 0$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-5x+4} = 0$. La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto de la asíntota:

para $x \to +\infty$: $y = \dfrac{x}{x^2-5x+4} > 0$, la curva queda por encima de la asíntota.

" $x \to -\infty$: $y = \dfrac{x}{x^2-5x+4} < 0$, la curva queda por debajo de la asíntota.

Asíntotas verticales: Son de la forma $x = k$, siendo x los valores finitos de x que hacen y infinito. En las funciones racionales, k son los valores de x que anulan el denominador.

Las rectas $x = 1$ y $x = 4$ son asíntotas verticales.

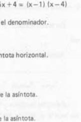
Posición de la curva respecto de las asíntotas verticales:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(1-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1-h}{[(1-h)-1][(1-h)-4]} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1-h}{-h(-3-h)} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(1+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1+h}{[(1+h)-1][(1+h)-4]} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1-h}{h(-3+h)} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(4-h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{4-h}{[(4-h)-1][(4-h)-4]} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{4-h}{-h(3-h)} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(4+h) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{4+h}{[(4+h)-1][(4+h)-4]} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{4+h}{h(3+h)} = +\infty$$



Como hay asíntotas horizontales para $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, no hay asíntotas oblicuas.

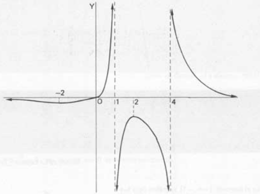
Máximos y mínimos:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-5x+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-5x+4)-x(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{(2+x)(2-x)}{(x-1)^2(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2+x)(2-x) = 0\ ;\ x_1 = -2,\ x_2 = 2\ ;\ f(-2) = \frac{-2}{4+10+4} = \frac{-1}{9}\ ;\ f(2) = -1$$

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
f'(x)		—	0	+		+	0	—		—	
f(x)		↘	$-\frac{1}{9}$	↗		↗	-1	↘		↘	

La función tiene un mínimo (relativo) para $x = -2$, y un máximo (relativo) para $x = 2$. Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva.



8.5 Dada la función $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$

estudiar su crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, puntos de inflexión y concavidad. Hacer una representación aproximada de $y = f(x)$.

(Univ. de Madrid, 1991)

$f(x) = 2x^3 - 8x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 8$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 8 = 0$; $x^2 = \dfrac{4}{3}$; $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

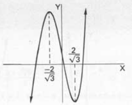
$f'(x) = 6(x - \dfrac{2}{\sqrt{3}})(x + \dfrac{2}{\sqrt{3}})$

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	—		+	
f(x)		creciente	máximo	decreciente	mínimo	creciente	

$f''(x) = 12x$; $f''(x) = 0 \Rightarrow 12x = 0$; $x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''(x)		—	0	+	
f(x)		cóncava	Punto inflexión	convexa	

$f(0) = 1$; $f(1) = -5$; $f(-1) = 7$; $f(2) = 1$; $f(-2) = 1$; $f(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}) \approx 7{,}15$; $f(\dfrac{2}{\sqrt{3}}) \approx -5{,}15$



8.6 **Representar gráficamente la función**

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq -1) \\ 1-x^2 & (-1 < x \leq 2) \\ -3 & (2 < x) \end{cases}$$

Indíquese además $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y clasifíquese la discontinuidad en el punto $x = -1$.

(Univ. de La Laguna – Tenerife)

En el intervalo $]-\infty, -1]$ la gráfica de la función es la de la recta $y = x$.

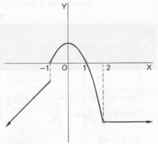
En el intervalo $]-1, 2]$ la gráfica de la función es la de la parábola $y = 1 - x^2$:

$x = 0 \Rightarrow y = 1$; $y = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow$

$x = \pm 1$; $f(-1^+) \to 0$; $f(2) = -3$

$y' = -2x$; $y' = 0 \Rightarrow x = 0$

$y'' = -2 < 0 \Rightarrow$ hay un máximo en $x = 0$



En el intervalo $]2, +\infty[$ la gráfica de la función es la de la recta $x = -3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2-h) = \lim\limits_{h \to 0} [1-(2-h)^2] = 1 - 4 = -3 \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(2+h) = \lim\limits_{h \to 0} (-3) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(-1-h) = \lim\limits_{h \to 0} (-1-h) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(-1+h) = \lim\limits_{h \to 0} [1-(-1+h)^2] = 0 \end{array}\right|$$

como estos límites son distintos, la continuidad es de *primera especie*.

8.7 Sea: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -8 \leq x < -4 \\ x+2 & \text{si} \quad -4 \leq x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si} \quad 2 \leq x \end{cases}$

Se pide:

a) Representar gráficamente $f(x)$
b) Estudiar la continuidad y crecimiento de $f(x)$
c) Determinar $f^{-1}(1)$
d) Obtener la gráfica de $|f(x)|$

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

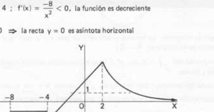
a) En el intervalo $[-8,-4[$ la gráfica es la recta $y=-1$

En el intervalo $[-4,2[$ es la recta $y=x+2$

Estudiemos la función en el intervalo $[2,+\infty[$:

$$f(2)=\frac{8}{2}=4 \ ; \ f'(x)=\frac{-8}{x^2}<0, \text{ la función es decreciente}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x}=0 \Rightarrow \text{la recta } y=0 \text{ es asíntota horizontal}$$



b) La función es discontinua en $x=-4$, en efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(-4-h) = \lim\limits_{h\to o} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(-4+h) = \lim\limits_{\substack{h\to o\\ h>o}} [(-4+h)+2] = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{por no ser estos límites iguales, la función no es continua en } x=-4.$$

También se podía haber visto la discontinuidad de la función al considerar que:

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h>o}} f(-4-h) = -1 \neq f(-4) = -4+2 = -2$$

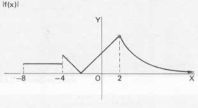
La función es constante en el intervalo $[-8,-4[$, es creciente en el intervalo $[-4,2[$ y decreciente en el intervalo $[2,+\infty[$.

c) De la gráfica se desprende que $f^{-1}(1)$ consta de dos elementos, uno perteneciente al intervalo $[-4,2[$ y otro al intervalo $[2,+\infty[$:

$$\left.\begin{array}{l} -\text{ en el intervalo } [-4,2[: \ x+2=1 \ ; \ x=-1 \\ -\text{ en el intervalo } [2,+\infty[: \ \dfrac{8}{x}=1 \ ; \ x=8 \end{array}\right| \Rightarrow f^{-1}(1)=\{-1,8\}$$

d) Considerando que $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{para los valores de x que hacen } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{para los valores de x que hacen } f(x) < 0 \end{cases}$

resulta la gráfica de $|f(x)|$



8.8 Hallar la gráfica de $y = \dfrac{e^x}{x}$

(Univ. de Madrid)

Campo de existencia: La función no está definida para $x = 0$, valor de x que anula el denominador. El campo de existencia es: $R - \{0\}$.

Corte con los ejes: $y = 0 \Rightarrow e^x = 0$, no existe ningún valor de x que haga $e^x = 0$. La gráfica no corta a los ejes.

Asíntotas horizontales: Son de la forma $y = k$, siendo $k = \lim_{x \to \infty} y$, pero por intervenir una expresión exponencial (e^x), hay que considerar, por separado, los casos en que $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \Rightarrow \text{no hay asíntota horizontal para } x \to +\infty.$$

Para $x \to -\infty$, haciendo el cambio $x = -t$, cuando $x \to -\infty$, $t \to +\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-t}}{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{-t \cdot e^t} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es asíntota horizontal}$$

Como para $x \to -\infty$, $\dfrac{e^x}{x} < 0$, la curva está por debajo de la asíntota.

Asíntotas verticales: Són de la forma $x = k$, siendo k los valores finitos de x que hacen la y infinito. En este caso es: $x = 0$.

Como para $x > 0$, $x \to 0$, $\dfrac{e^x}{x} \to +\infty$, la curva se acerca a la asíntota $x = 0$, por la derecha, según valores positivos de y.

Para $x < 0$, $x \to 0$, $\dfrac{e^x}{x} \to -\infty$, la curva se acerca a la asíntota $x = 0$, por la izquierda, según valores negativos de y.

Asíntotas generales: Son de la forma $y = mx + b$, siendo $m = \lim_{x \to \infty} \dfrac{y}{x}$, y $b = \lim_{x \to \infty} (y - mx)$.

Como para $x \to -\infty$ hay asíntota horizontal, sólo tendremos que estudiar las asíntotas generales para $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty \Rightarrow \text{no hay asíntota general, la}$$

curva termina en una rama parabólica de dirección vertical.

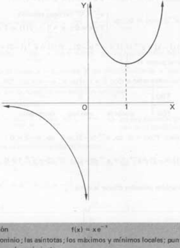
Maximos y mínimos:

$$y' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} \;;\; y' = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} e^x = 0 & \text{no tiene solución} \\ x-1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1 \end{cases}$$

Estudiemos la variación de la curva:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	:	$-$ 0	$+$
y	$\searrow$	:	$\searrow$ 1	$\nearrow$

Con los calculos hechos podemos dibujar la curva:



8.9 Dada la función $f(x) = xe^{-x}$

a) Estudiar su dominio; las asíntotas; los máximos y mínimos locales; puntos de inflexión y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Hacer su representación gráfica.

(Univ. de las Islas Baleares)

Dominio: La función está definida para todo valor real de x.

Corte con los ejes: $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;;\quad y = 0 \;\Rightarrow\; xe^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x} = 0 \text{ (no tiene solución)} \end{cases}$

Asíntotas horizontales: Por ser una función potencial exponencial hay que estudiar las asíntotas horizontales para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \text{ es asíntota horizontal (para } x \to +\infty).$$

Como $x e^{-x} > 0$ para $x > 0$, la curva queda por encima de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = (-\infty) e^{+\infty} = -\infty \Rightarrow$ no hay asíntota horizontal para $x \to -\infty$.

Asíntotas verticales: No hay; puesto que no hay ningún valor finito de x que haga la y infinito.

Asíntotas oblicuas: Sólo hay que estudiarla para $x \to -\infty$; ya que para $x \to +\infty$ hay asíntota horizontal.

$$y = mx + b \left| \begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = e^{+\infty} = \infty \\ b = \lim\limits_{x \to -\infty} (y - mx) \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ no hay asíntota oblicua; la curva termina en una rama parabólica de dirección vertical.

Maximos y mínimos: $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x e^{-x} (-1) = e^{-x} (1-x)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x} (1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} = 0 & \text{no tiene solución} \\ 1 - x = 0 ; \; x = 1 ; & f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

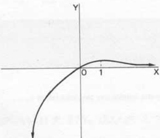
$f''(x) = e^{-x} (-1) (1-x) + e^{-x} (-1) = e^{-x} (x-2)$; $f''(1) = e^{-1} (1-2) = -e^{-1} < 0 \Rightarrow$ la curva tiene un máximo en el punto $(1 ; \frac{1}{e})$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	creciente	máximo	decreciente

Puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x} (x-2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$; $x = 2$; $f(2) = \dfrac{2}{e^2}$

$f'''(x) = e^{-x} (-1) (x-2) + e^{-x} \cdot 1 = e^{-x} (3-x)$; $f'''(2) = e^{-2} \cdot 1 \neq 0 \Rightarrow$ el punto $(2 ; \dfrac{2}{e^2})$ es de inflexión.

Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva



8.10 **Representa gráficamente la función $y = x \cdot \log x$. Indicando el dominio de definición, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas.**

(Univ. de Santiago, 1991)

Dominio de definición. Como $\log x$ sólo existe para $x > 0$, el dominio de definición de la función es R_+^* $(0 < x < +\infty)$.

Corte con los ejes: $y = 0 \Rightarrow x \cdot \log x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ (no sirve por no pertenecer al dominio de definición).} \\ \log x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Es conveniente ver como se acerca la curva al eje OY cuando $x \to 0$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \cdot \log x = \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0$$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \to +\infty} x \cdot \log x = +\infty \Rightarrow$ no hay asíntotas horizontales.

Verticales: Son de la forma $x = k$, siendo k los valores finitos de x que hacen y infinito. En este caso, como para $x \to 0$, $\log x \to -\infty$, la recta $x = 0$ podría ser asíntota vertical, pero hemos visto que para $x \to 0$, $x \cdot \log x \to 0$, luego no hay asíntotas verticales.

Asíntotas generales u oblicuas:

$y = mx + b$: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty \Rightarrow$ no hay asíntotas generales, la curva tiene una rama parabólica de dirección vertical.

Máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento:

$f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$; $f'(x) = 0 \Rightarrow \log x + 1 = 0$; $\log x = -1$; $x = e^{-1}$

$f(e^{-1}) = e^{-1} \cdot \log e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) = \frac{-1}{e}$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	decreciente	$\frac{-1}{e}$	creciente

La función tiene un mínimo absoluto en $x = \frac{1}{e}$ igual a $\frac{-1}{e}$.

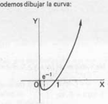
Es conveniente estudiar con qué inclinación se acerca la curva al punto $(0,0)$:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (\log x + 1) = -\infty$$

Concavidad y convexidad, puntos de inflexión: $f''(x) = \frac{1}{x}$; $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 0$ (ecuación que no tiene solución), no hay puntos de inflexión.

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
$f(x)$	convexa	

Con los datos obtenidos podemos dibujar la curva:



8.11 Construir la curva $y = \sqrt{3^x - 9}$

(Univ. de Valladolid, 1991)

Campo de existencia: $3^x - 9 \geq 0 \;\Rightarrow\; 3^x \geq 9\;;\; x \geq 2\;;\; y \geq 0$

Corte con el eje OX: $y = 0 \;\Rightarrow\; 3^x - 9 = 0\;;\; x = 2$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3^x - 9} = +\infty \;\Rightarrow$ no hay asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales: No hay ningún valor finito de x que haga la y infinito. No hay asíntotas verticales.

Asíntotas generales:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3^x-9}}{x} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{3^x \log 3}{2\sqrt{3^x-9}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3^x}\cdot \log 3}{2\sqrt{1-\dfrac{9}{3^x}}} =$$

$= \left(\dfrac{\infty}{2\sqrt{1-0}}\right) = \infty \;\Rightarrow$ la curva tiene una rama parabólica de dirección vertical.

Máximos y mínimos: $y' = \dfrac{3^x \cdot \log 3}{2\sqrt{3^x - 9}} > 0 \;\Rightarrow$ la curva es creciente para $x > 2$, y como para $x \to 2^+$, $y' \to +\infty$, en el punto (2, 0) tiene una tangente vertical.

Puntos de inflexión: $y' = \dfrac{\log 3}{2} \cdot 3^x (3^x - 9)^{-\frac{1}{2}} \;\Rightarrow$

$$y'' = \frac{\log 3}{2}\left((3^x \log 3)(3^x - 9)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(3^x - 9)^{-\frac{3}{2}} (3^x \log 3)\cdot 3^x \right) =$$

$$= \frac{\log 3}{2}\, (3^x \cdot \log 3)\left(\frac{1}{\sqrt{3^x-9}} - \frac{1}{2}\,\frac{3^x}{(3^x-9)\sqrt{3^x-9}}\right) = \frac{(\log 3)^2}{2}\cdot 3^x \cdot \frac{2(3^x-9)-3^x}{2(3^x-9)\sqrt{3^x-9}} =$$

$$= \frac{(\log 3)^2}{4}\cdot 3^x\, \frac{3^x - 18}{(3^x-9)\sqrt{3^x-9}}$$

$y'' = 0 \;\Rightarrow\; 3^x - 18 = 0\;;\; 3^x = 18\;;\; x \log 3 = \log 18\;;\; x = \dfrac{\log 18}{\log 3} \approx 2{,}63\;;\; f(2{,}63) \approx 3$

x	2	$\frac{\log 18}{\log 3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	cóncava		convexa

8.12 Representar gráficamente la función $f\colon R \to R$ definida por:

$$f(x) = 2\cos x - \cos 2x$$

(Univ. de Murcia)

Simetrías y periocidad:

$f(-x) = 2\cos(-x) - \cos 2(-x) = 2\cos x - \cos 2x = f(x) \Rightarrow$ la función es par.

La función $h\colon R \to R$ definida por $h(x) = 2\cos x$ es periódica de periodo $T_1 = 2\pi$.

La función $g\colon R \to R$ definida por $g(x) = \cos 2x$ es periódica de periodo $T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{\pi} = \frac{2}{1} \Rightarrow T = 1 \cdot T_1 = 2 \cdot T_2 = 2\pi$ es el periodo de la función $f = h - g$.

Por ser la función periódica, de periodo 2π, sólo tendremos que estudiarla en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y por ser función par sólo la tendremos que estudiar en el intervalo $[0, \pi]$

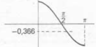
Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot \cos 0 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$

$y = 0 \Rightarrow 2\cos x - \cos 2x = 0$; $2\cos x - (2\cos^2 x - 1) = 0$; $2\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\cos x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1-1{,}732}{2} = -0{,}66$

(la solución $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$ no sirve).

Al cortar la gráfica de $y = \cos x$, en el intervalo $[0, \pi]$, por la recta $y = -0{,}366$, resulta que hay un punto de corte, en el intervalo $[0, \pi]$.



Máximos y mínimos:

$f'(x) = -2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} 2x$; $f'(x) = 0 \Rightarrow -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 0$; $-\operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$;

$$\operatorname{sen} x(-1+2\cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 ;\ x_2 = \pi \\ 1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_3 = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$f(0) = 1 ;\ f(\pi) = 2(-1) - 1 = -3 ;\ f(\frac{\pi}{3}) = -2\cos^2\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{3} + 1 = -2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

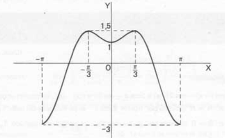
$$f''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x$$

$$f''(0) = -2\cdot 1 + 4\cdot 1 = 2 > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } x = 0$$

$$f''(\frac{\pi}{3}) = -2\cdot\frac{1}{2} + 4(-\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow \text{máximo en } x = \frac{\pi}{3}$$

$$f''(\pi) = -2(-1) + 4(1) > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } x = \pi$$

Con los cálculos hechos podemos dibujar la curva.



CAPITULO 9

INTERPOLACION

INTERPOLACION.

La interpolación consiste en obtener la función más sencilla, $y = f(x)$, que toma los valores $y_o, y_1, y_2, \ldots, y_n$, correspondientes a los valores $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable.

Si los $n+1$ valores: $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n$ son todos distintos, la función más sencilla es la función expresada por un polinomio de grado n:

$$f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (1)$$

Sea obtener una función f tal que $f(1) = 4$, $f(3) = 14$, $f(4) = 25$.

Como tenemos tres valores distintos de x, podremos obtener un polinomio de grado dos que toma los valores dados:

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 4 & \Rightarrow & 4 = a + b + c \\ f(3) = 14 & \Rightarrow & 14 = a + 3b + 9c \\ f(4) = 25 & \Rightarrow & 25 = a + 4b + 16c \end{array}\right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \longrightarrow \\ (3) \end{array} \begin{array}{ll} (1) & 4 = a + b + c \\ (2') = (2) - (1) & 10 = 2b + 8c \\ (3') = (3) - (2) & 11 = b + 7c \end{array} \Bigg\} \longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 4 = a + b + c \\ (2') & 10 = 2b + 8c \\ (3'') = (3') - \frac{1}{2}(2') & 6 = 3c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4 = a - 3 + 2 \Rightarrow \underline{a = 5} \\ 10 = 2b + 8 \cdot 2 \Rightarrow \underline{b = -3}\,; \\ \underline{c = 2}\,; \end{array} \Rightarrow f(x) = 5 - 3x + 2x^2$$

Hay un polinomio de grado n a lo sumo, y uno solo, que toma los $n+1$ valores $y_o, y_1, y_2, \ldots, y_n$ para los $n+1$ valores distintos de la variable: $x_o, x_1, \ldots, x_n$.

En la práctica, el polinomio (1) se expresa de la forma

$$f(x) = b_o + b_1 (x - x_o) + b_2 (x - x_o)(x - x_1) + \cdots + b_n (x - x_o)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \qquad (2)$$

ya que es más comodo obtener los coeficientes.

Sea, el mismo ejemplo anterior, obtener una función f tal que $f(1) = 4$, $f(3) = 14$, $f(4) = 25$.

El polinomio de segundo grado lo podemos escribir de la forma

$$f(x) = a + b(x-1) + c(x-1)(x-3)$$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 4 & \Rightarrow & 4 = a \\ f(3) = 14 & \Rightarrow & 14 = a + b(3-1) \\ f(4) = 25 & \Rightarrow & 25 = a + b(4-1) + c(4-1)(4-3) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{a = 4} \\ 14 = 4 + 2b\,;\ \underline{b = 5} \\ 25 = 4 + 5 \cdot 3 + c \cdot 3 \cdot 1\,;\ \underline{c = 2} \end{array} \Rightarrow$$

$$f(x) = 4 + 5(x-1) + 2(x-1)(x-3) = 2x^2 - 3x + 5$$

FORMULA DE INTERPOLACION DE LAGRANGE. La función f tal que $f(x_o) = y_o$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2, \ldots, f(x_n) = y_n$ está definida por el polinomio $f(x)$ de grado n:

$$f(x) = f(x_o)\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_o-x_1)(x_2-x_2)\cdots(x_o-x_n)} + f(x_1)\,\frac{(x-x_o)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \cdots +$$

$$+ \cdots + f(x_n)\,\frac{(x-x_o)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_o)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

El polinomio $f(x)$ de grado dos tal que $f(1) = 4$, $f(3) = 14$ y $f(4) = 25$ es:

$$f(x) = 4\,\frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 14\,\frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 25\,\frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} = \frac{4}{(-2)(-3)}(x^2-7x+12) +$$

$$+ \frac{14}{2(-1)}(x^2-5x+4) + \frac{25}{3\cdot 1}(x^2-4x+3) = \frac{2}{3}(x^2-7x+12) - 7(x^2-5x+4) + \frac{25}{3}(x^2-4x+3) =$$

$$= \frac{1}{3}(2x^2-14x+24-21x^2+105x-84+25x^2-100x+75) = \frac{1}{3}(6x^2-9x+15) = 2x^2-3x+5$$

La fórmula de Lagrange cuando sólo se conocen dos valores: $f(x_o) = y_o$ y $f(x_1) = x_1$, es:

$$f(x) = f(x_o)\,\frac{x-x_1}{x_o-x_1} + f(x_1)\,\frac{x-x_o}{x_1-x_o} = \frac{f(x_1)-f(x_o)}{x_1-x_o}\,x + \frac{x_1\cdot f(x_o) - x_o\cdot f(x_1)}{x_1-x_o}$$

que es la fórmula de la *interpolación lineal.*

La fórmula de Lagrange cuando se conocen tres valores: $f(x_o) = y_o$, $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$, es:

$$f(x) = f(x_o)\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_1)} + f(x_1)\frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)}$$

que es la fórmula de la *interpolación cuadrática.*

PROBLEMAS

9.1 Encontrar una función polinómica de segundo grado que pase por los puntos: $(0, -1)$, $(1, 2)$ y $(2,3)$.

(Univ. de León, 1991)

Sea $f(x) = a + b(x-0) + c(x-0)(x-1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 = a \\ f(1) = 2 = a + b(1-0) \\ f(2) = 3 = a + b(2-0) + c(2-0)(2-1) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{a=-1} \\ 2 = -1 + b, \underline{b=3} \\ 3 = -1 + 3\cdot 2 + 2c;\ \underline{c=-1} \end{array} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 3x - x(x-1) = -x^2 + 4x - 1}$$

SEGUNDA SOLUCION: Usando la fórmula de interpolación de Lagrange:

$$f(x) = -1\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + 2\,\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 3\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = -\frac{1}{2}(x^2-3x+2) -$$

$$-2(x^2-2x) + \frac{3}{2}(x^2-x) = -x^2 + 4x - 1.$$

9.2 De una función $f(x)$ se conocen los valores $f(1) = 4$, $f(2) = 7$, $f(4) = 31$.

a) Calcular la función de interpolación cuadrática que toma dichos valores.

b) Calcular el valor de la función de interpolación para $x = 3$.

(Univ. de Madrid, 1991)

Sea $f(x) = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 4 = a \\ f(2) = 7 = a + b(2-1) \\ f(4) = 31 = a + b(4-1) + c(4-1)(4-2) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{a=4} \\ 7 = 4 + b;\ \underline{b=3} \\ 31 = 4 + 9 + 6c;\ \underline{c=3} \end{array} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = 4 + 3(x-1) + 3(x-1)(x-2) = 3x^2 - 6x + 7}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & -6 & 7 \\ 3 & & 9 & 9 \\ \hline & 3 & 3 & 16 \end{array} \qquad \boxed{f(3)=16}$$

SEGUNDA SOLUCION: Usando la fórmula de interpolación de Lagrange:

$$f(x) = 4\,\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 7\,\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} + 31\,\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} =$$

$$= \frac{4}{3}(x^2-6x+8) - \frac{7}{2}(x^2-5x+4) + \frac{31}{6}(x^2-3x+2) =$$

$$= \frac{1}{6}[(8x^2-48x+64)-(21x^2-105x+84)+(31x^2-93x+62)] = 3x^2-6x+7.$$

9.3 Dada la siguiente tabla de valores de una función

x	1	2,5	4	5
$f(x)$	2	-1	8	30

realiza una estimación del valor de la función para $x = 3$.

(Univ. de Salamanca, 1991)

Sea $f(x) = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2{,}5) + d(x-1)(x-2{,}5)(x-4)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 2 = a \\ f(2{,}5) = -1 = a + b(2{,}5-1) \\ f(4) = 8 = a + b(4-1) + c(4-1)(4-2{,}5) \\ f(5) = 30 = a + b(5-1) + c(5-1)(5-2{,}5) + d(5-1)(5-2{,}5)(5-4) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\underline{a=2}$; $-1 = 2 + 1{,}5\,b$, $\underline{b=-2}$; $8 = 2 - 2\cdot 3 + c\cdot 3\cdot 1{,}5$, $\underline{c = \frac{8}{3}}$;

$30 = 2 - 2\cdot 4 + \frac{8}{3}\cdot 4\cdot 2{,}5 + d\cdot 4\cdot 2{,}5\cdot 1$, $\underline{d = \frac{14}{15}}$ $\Rightarrow$

$$f(x) = 2 - 2(x-1) + \frac{8}{3}(x-1)(x-2{,}5) + \frac{14}{15}(x-1)(x-2{,}5)(x-4) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{15}(14x^3 - 65x^2 + 61x + 20)}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 14 & -65 & 61 & 20 \\ 3 & & 42 & -69 & -24 \\ \hline & 14 & -23 & -8 & -4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(3) = \frac{-4}{15}}$$

9.4 El número de turistas que visitaron España en el período 1970–1985 siguió la siguiente tendencia

Años	1970	1975	1980	1985
Millones de turistas	24,1	30,1	38,1	43,2

a) Hallar la previsión para 1988 a partir de la función lineal del último trozo 1980–1985.
b) Efectuar la misma previsión con el polinomio de interpolación de 2º grado a partir de los datos de 1975 y 1985.

(Univ. de Extremadura, 1991)

Para simplificar los cálculos identificaremos los años 1970, 1975, 1980, 1985 y 1988, respectivamente, con los valores $x = -5$, 0, 5, 10 y 13. Los datos los podemos resumir en la siguiente tabla:

x	−5	0	5	10
y	24,1	30,1	38,1	43,2

a) Sea $f(x) = a + b(x-5)$

$$\left.\begin{array}{l} f(5) = 38{,}1 = a \\ f(10) = 43{,}2 = a + b(10-5) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \underline{a = 38{,}1} \quad 43{,}2 = 38{,}1 + 5b \; ; \; \underline{b = 1{,}02} \quad \Rightarrow$$

$$f(x) = 38{,}1 + 1{,}02(x-5) \Rightarrow f(13) = 38{,}1 + 1{,}02(13-5) = 38{,}1 + 8{,}16 = 46{,}26$$

$\boxed{\text{para el año 1988 se preveen 46,26 millones de turistas.}}$

b) Sea $g(x) = a + b(x-5) + c(x-5)(x-10)$

$$\left.\begin{array}{l} g(5) = 38{,}1 = a \\ g(10) = 43{,}2 = a + b(10-5) \\ g(0) = 30{,}1 = a + b(0-5) + c(0-5)(0-10) \end{array}\right| \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = 38{,}1 \\ b = 1{,}02 \\ c = -0{,}058 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$g(x) = 38{,}1 + 1{,}02(x-5) - 0{,}058(x-5)(x-10) \Rightarrow$$
$$g(13) = 38{,}1 + 1{,}02(13-5) - 0{,}058(13-5)(13-10) = 44{,}868 \Rightarrow$$

$\boxed{\text{para el año 1988 se preveen 44,868 millones de turistas.}}$

9.5 Un comité sobre el seguimiento de las pruebas de Selectividad en la Universidad de Murcia tiene los siguientes datos sobre el número de alumnos matriculados en las pruebas:

Año	1984	1988	1989
Número de alumnos matriculados	3000	3800	4100

Obtener el polinomio interpolador de segundo grado para estimar:
a) El número de alumnos matriculados en 1986.
b) El número de alumnos que se matricularán en 1995.
¿Cual de las dos estimaciones es más fiable?

(Univ. de Murcia)

Para simplificar los cálculos identificaremos los años 1984, 1986, 1988, 1989 y 1995, respectivamente, con los valores $x = 0, 4, 5$ y 11. Los datos los podemos resumir en la siguiente tabla:

x	0	4	5
$f(x)$	3000	3800	4100

Sea $f(x) = a + b(x-0) + c(x-0)(x-4)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 3000 = a \\ f(4) = 3800 = a + b(4-0) \\ f(5) = 4100 = a + b(5-0) + c(5-0)(5-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{a = 3000} \\ 3800 = 3000 + 4b;\ \underline{b = 200} \\ 4100 = 3000 + 200 \cdot 5 + 5c;\ \underline{c = 20} \end{array}$$

$$\boxed{f(x) = 3000 + 200x + 20x(x-x) = 20x^2 + 120x + 3000}$$

SEGUNDA SOLUCION: Usando la fórmula de interpolación de Lagrange:

$$f(x) = 3000\,\frac{(x-4)(x-5)}{(0-4)(0-5)} + 3800\,\frac{(x-0)(x-5)}{(4-0)(4-5)} + 4100\,\frac{(x-0)(x-4)}{(5-0)(5-4)} =$$

$$= 150(x^2 - 9x + 20) - 950(x^2 - 5x) + 820(x^2 - 4x) = 20x^2 + 120x + 3000.$$

a)

	20	120	3000
2	20	40	320
	20	160	3320

$\Rightarrow$ se estima que el número de alumnos matriculados en 1986 es 3320.

b)

	20	120	3000
11		220	3740
	20	340	6740

$\Rightarrow$ la estimación del número de alumnos matriculados en 1995 es de 6740.

La estimación para el año 1986 es más fiable. Se conoce el número de alumnos matriculados dos años antes y dos y tres después. Para el año 1995 se conoce el número de alumnos matriculados once, siete y seis años antes.

9.6 La distancia de frenada (en m.) de un cierto automóvil en función de su velocidad (en Km/h) viene dada por la siguiente tabla:

Velocidad	60	100	120	140
Distancia de frenada	15	35.5	54.9	90

Utilizando dicha tabla, realizar una estimación de la velocidad a la que iba el automóvil si la distancia de frenada es de 75 m. (Se debe usar al menos una interpolación cuadrática).

(Univ. de Salamanca, 1992)

Distancia de frenada:	x	15	35,5	54,9	90
Velocidad	$f(x)$	60	100	120	140

Usando la fórmula de interpolación de Lagrange:

$$f(x) = 60\ \frac{(x-35{,}5)(x-54{,}9)(x-90)}{(15-35{,}5)(15-54{,}9)(15-90)} + 100\ \frac{(x-15)(x-54{,}9)(x-90)}{(35{,}5-15)(35{,}5-54{,}9)(35{,}5-90)} +$$

$$+120\ \frac{(x-15)(x-35{,}5)(x-90)}{(54{,}9-15)(54{,}9-35{,}5)(54{,}9-90)} + 140\ \frac{(x-15)(x-35{,}5)(x-54{,}9)}{(90-15)(90-35{,}5)(90-54{,}9)}$$

$$f(75) = 60\ \frac{(75-35{,}5)(75-54{,}9)(75-90)}{(-20{,}5)(-39{,}9)(-75)} + 100\ \frac{(75-15)(75-54{,}9)(75-90)}{(20)(-19{,}4)(-54{,}5)} +$$

$$+120\ \frac{(75-15)(75-35{,}5)(75-90)}{(39{,}9)(19{,}4)(-35{,}1)} + 140\ \frac{(75-15)(75-35{,}5)(75-54{,}9)}{(75)(54{,}5)(35{,}1)} =$$

$$= \boxed{129{,}6}\ \text{m}$$

9.7 Se considera la tabla de cuadrados siguientes:

x	6	7	8
x^2	36	49	64

Hallar por interpolación, a partir de estos datos, $\sqrt{55}$.

(Univ. de Valladolid, 1992)

Haciendo $x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$$f(y) = \sqrt{y} = a + b(y-36) + c(y-36)(y-49)$$

$$f(36) = 6 = a\ ;\ a = 6$$

$$f(49) = 7 = 6 + b(49-36)\ ;\ b = \frac{1}{13}$$

$$f(64) = 8 = 6 + \frac{1}{13}(64-36) + c(64-36)(64-49) \Rightarrow 2 - \frac{28}{13} = c \cdot 28 \cdot 15\ ;\ c = \frac{-1}{2730}$$

de donde: $f(y) = 6 + \frac{1}{13}(y-36) - \frac{1}{2730}(y-36)(y-49)$

$$f(55) = \sqrt{55} = 6 + \frac{1}{13}(55-36) - \frac{1}{2730}(55-36)(55-49) = 6 + \frac{19}{13} - \frac{114}{2730} =$$

$$= 6 + 1{,}462 - 0{,}042 = \boxed{7{,}42}$$

3º) $$\int \frac{d\,[f(x)]}{dx}dx = f(x) + C$$

4º) $$\int d\,[f(x)] = f(x) + C$$

Estas propiedades nos dice que los signos de derivación (o diferenciación) y de integración se destruyen, pero cuando el de integración va delante hay que sumar una constante

5º) Si λ es una constante: $\int \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$

6º) Si $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ son constantes:

$$\int [\lambda_1 \cdot f_1(x) + \lambda_2 \cdot f_2(x) + \cdots + \lambda_n \cdot f_n(x)]\,dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx + \cdots + \cdots + \lambda_n \int f_n(x)\,dx$$

7º) $$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff \int f(ax)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax) + C$$

8º) $$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff \int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C$$

9º) $$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$$

CALCULO DE PRIMITIVAS.

No existe un método general para calcular las primitivas de las funciones elementales.

Para hallar todas las primitivas de una función, basta obtener sólo una primitiva. Todas las restantes primitivas son iguales a la hallada más una constante.

El cálculo del conjunto de las primitivas de una función se llama *integración* de esta función.

La derivada de una función elemental es otra función elemental, pero la primitiva de una función elemental puede que no se pueda expresar con la ayuda de un número finito de funciones elementales, así ocurre, entre otras, con las primitivas de las funciones **f** tales que f(x) es igual a

$$e^{-x^2}, \quad \frac{1}{\log x}, \quad \frac{\cos x}{x}, \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \sqrt{1-a^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

De la definición de función primitiva y del cuadro de derivadas de funciones elementales y de funciones compuestas se deduce el cuadro de integrales inmediatas.

El siguiente cuadro se supone válido para todo intervalo $I \subset R$ en el que la función f es continua y derivable, con las observaciones indicadas a la derecha de cada fórmula.

Omitiremos en todas las primitivas la constante de integración.

INTEGRALES INMEDIATAS	EJEMPLOS
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$ $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $\int (ax+b)^3\,dx = \frac{1}{a}\int (ax+b)^3 \cdot a\,dx = \frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^4}{4}$ $\int \frac{dx}{(ax+b)^3} = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{-3} \cdot a\,dx = \frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{-2}}{-2}$ $\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = \int (\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}}\cos x\,dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} =$ $= \frac{2}{3}(\operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}}$ $\int \frac{dx}{\sqrt{-x}}\,dx = -\int (-x)^{-\frac{1}{2}}(-1)\,dx = -\frac{(-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} =$ $= -2(-x)^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{-x}$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log\lvert f(x)\rvert \qquad f(x) \neq 0$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log\lvert ax+b\rvert$ $\int \frac{dx}{x\log x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x}\,dx = \log\lvert\log x\rvert$ $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\log\lvert\cos x\rvert$ $\int \operatorname{ctg}(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{\cos(ax+b)\cdot a}{\operatorname{sen}(ax+b)}\,dx =$ $= \frac{1}{a}\log\lvert\operatorname{sen}(ax+b\rvert$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)}$	$\int e^x\,dx = e^x$ $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int e^{ax+b} \cdot a\,dx\,x = \frac{1}{a}e^{ax+b}$

METODO DE SUSTITUCION O CAMBIO DE VARIABLE

Si f es una función real continua en el intervalo $[a,b]$ y g una función biyectiva del intervalo $[\alpha,\beta]$ sobre $[a,b]$, derivable y con derivada continua, definida por

$$x = g(t)$$

se tiene, al ser $dx = g'(t) \cdot dt$:

$$\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]\,g'(t)\,dt \tag{1}$$

estando la última integral definida en el intervalo $[\alpha,\beta]$.

Prácticamente se sustituye x por $g(t)$ y dx por $g'(t)\,dt$.

El método de sustitución se aplica cuando la integral del segundo miembro de (1) es más sencilla de calcular que la del primer miembro.

A menudo, la sustitución se expresa de la forma $t = h(x)$, o bien de la forma $j(x) = k(t)$.

Después de calcular la integral del segundo miembro de (1), se ha de sustituir la variable t por su expresión en función de x.

Sea calcular $\qquad I = \int \sqrt{-x}\,dx$

Haciendo el cambio $-x = t^2$: $(-1)dx = 2t\,dt$, de donde: $I = \int t(-2t)\,dt = -2\int t^2 dt = -2\,\dfrac{t^3}{3} = -\dfrac{2}{3}\sqrt{(-x)^3}$

Sea calcular $\qquad I = \int \dfrac{e^x}{\sqrt{e^x-5}}\,dx$

Haciendo el cambio $e^x - 5 = t^2$: $e^x dx = 2t\,dt$, de donde: $I = \int \dfrac{2t\,dt}{t} = 2\int dt = 2t = 2\sqrt{e^x-5}$

INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES.

Para el cálculo de la integral $\qquad \int \dfrac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

donde P(x) y Q(x) son polinomios enteros en x con coeficientes reales, se efectúa la división de P(x) por Q(x) (sólo en el caso de que el grado del numerador sea igual o mayor que el del denominador):

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

$\int C(x)\,dx$ es inmediata ya que C(x) es un polinomio, quedando el problema reducido al cálculo de la integral

$$I = \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

en donde el grado del numerador es menor que el del denominador.

Si a, b, ⋯ son las raices reales de la ecuación $Q(x) = 0$, de órdenes de multiplicidad $\alpha, \beta, \cdots$, y $p \pm qi, r \pm si, \cdots$ las raices imaginarias conjugadas con órdenes de multiplicidad $\lambda, \mu, \cdots$, es decir:

$$Q(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdots [(x-p)^2+q^2]^\lambda [(x-r)^2+s^2]^\mu \cdots$$

se descompone $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} +$$

$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_\beta-1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{[(x-p)^2+q^2]^\lambda} + \frac{M_{\lambda-1}x + N_{\lambda-1}}{[(x-p)^2+q^2]^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{(x-p)^2+q^2} +$$

$$+ \frac{S_\mu x + T_\mu}{[(x-r)^2+s^2]^\mu} + \frac{S_{\mu-1}x + T_{\mu-1}}{[(x-r)^2+s^2]^{\mu-1}} + \cdots + \frac{S_1 x + T_1}{(x-r)^2+s^2} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Para calcular los coeficientes $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \cdots, A_1, B_\beta, B_{\beta-1}, \cdots, B_1, M_\lambda, N_\lambda, \cdots, S_1, T_1$, se reduce la expresión anterior a la forma entera multiplicando ambos miembros por $Q(x)$. En la forma entera se sustituye, en ambos miembros, la x por los valores de las raices reales, lo que nos dará directamente $A_\alpha, B_\beta, \cdots$; después se igualan los coeficientes de los términos de igual grado hasta obtener tantas ecuaciones como coeficientes falten por determinar.

Hallada la descomposición en fracciones simples, nos quedarán integrales de los siguientes tipos:

1º) $$\int \frac{A}{x-a} = A \cdot \log |x-a|$$

2º) $$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A \int (x-a)^{-n}\,dx = A\,\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} \qquad (n \neq 1)$$

3º) $$\int \frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}\,dx$$

4º) $$\int \frac{Mx+N}{[(x-p)^2+q^2]^n}\,dx \qquad (n \in N^*)$$

Las integrales del tipo $I = \displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}\,dx$ se calculan expresando el numerador en forma

$$I = \int \frac{M(qu+p)+N}{q^2u^2+q^2}\cdot q\,du = \frac{q}{q^2}\int \frac{Mqu+Mp+N}{u^2+1}\,du = \frac{1}{q}\int \frac{Mqu}{u^2+1}\,du + \frac{1}{q}\int \frac{Mp+}{u^2+}$$

$$= \frac{Mq}{2q}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du + \frac{Mp+N}{q}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{M}{2}\log(u^2+1) + \frac{Mp+N}{q}\operatorname{arc\,tg} u$$

deshaciendo el cambio: $I = \frac{M}{2}\log\left[\left(\frac{x-p}{q}\right)^2+1\right] + \frac{Mp+N}{q}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q}$

Sea calcular $$I = \int \frac{3x^2-9x+15}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$$

El grado del numerador es menor que el grado del denominador. Las raices del denominador son 1 (dob descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{3x^2-9x+15}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} \Rightarrow$$

$$3x^2-9x+15 = A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para} & x=1: & 9=3A \\ \text{para} & x=-2: & 45=9C \\ \text{coef. de } x^2: & & 3=B+C \end{array}\right| \Rightarrow A=3,\ C=5,\ B=-2$$

$$I = \int\left(3(x-1)^{-2} - \frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+2}\right)dx = 3\,\frac{(x-1)^{-1+1}}{-2+1} - 2\log|x-1| + 5\log|x+2| =$$

$$= \frac{-3}{x-1} - 2\log|x-1| + 5\log|x+2|$$

Sea calcular $$I = \int \frac{5x^3-x^2+2x-1}{x^3+x}\,dx$$

Como el grado del numerador es igual que el del denominador, se hace la división:

$$\begin{array}{l|l} 5x^3-x^2+2x-1 & x^3+x \\ \underline{-5x^3 \quad\ \ -5x} & 5 \\ \quad -x^2-3x-1 & \end{array} \Rightarrow \frac{5x^3-x^2+2x-1}{x^3+x} = 5 - \frac{x^2+3x+1}{x^3+x} \qquad (1)$$

Descompongamos la fracción de (1) en fracciones simples:

$$x^3+x=0 \Rightarrow x(x^2+1)=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+1=0,\ \text{raices imaginarias}\end{array}\right.$$

$$\frac{x^2+3x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} \Rightarrow x^2+3x+1 = A(x^2+1)+(Bx+$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{para } x=0: & 1=A \\ \text{coef. de } x^2: & 1=A+B \\ \text{coef. de } x: & 3=C \end{array}\right| \Rightarrow A=1,\ B=0,\ C=3 \Rightarrow \frac{x^2+3x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2+1},\ \text{de}$$

$$I = \int\left(5 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2+1}\right)dx = 5x - \log|x| - 3\operatorname{arc\,tg} x$$

$$I = \int \frac{M(qu+p)+N}{q^2u^2+q^2} \cdot q\,du = \frac{q}{q^2}\int \frac{Mqu+Mp+N}{u^2+1}\,du = \frac{1}{q}\int \frac{Mqu}{u^2+1}\,du + \frac{1}{q}\int \frac{Mp+N}{u^2+1}\,du =$$

$$= \frac{Mq}{2q}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du + \frac{Mp+N}{q}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{M}{2}\log(u^2+1) + \frac{Mp+N}{q}\ \text{arc tg}\ u$$

deshaciendo el cambio: $I = \dfrac{M}{2}\log\left[\left(\dfrac{x-p}{q}\right)^2+1\right] + \dfrac{Mp+N}{q}\ \text{arc tg}\ \dfrac{x-p}{q}$

Sea calcular $$I = \int \frac{3x^2-9x+15}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$$

El grado del numerador es menor que el grado del denominador. Las raíces del denominador son 1 (doble) y −2, descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{3x^2-9x+15}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} \Rightarrow$$

$$3x^2-9x+15 = A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para} & x=1: & 9=3A \\ \text{para} & x=-2: & 45=9C \\ \text{coef. de } x^2: & & 3=B+C \end{array}\right| \Rightarrow A=3,\ C=5,\ B=-2$$

$$I = \int\left(3(x-1)^{-2} - \frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+2}\right)dx = 3\,\frac{(x-1)^{-1+1}}{-2+1} - 2\log|x-1| + 5\log|x+2| =$$

$$= \frac{-3}{x-1} - 2\log|x-1| + 5\log|x+2|$$

Sea calcular $$I = \int \frac{5x^3-x^2+2x-1}{x^3+x}\,dx$$

Como el grado del numerador es igual que el del denominador, se hace la división:

$$\begin{array}{l|l} 5x^3-x^2+2x-1 & x^3+x \\ \underline{-5x^3\qquad -5x} & 5 \\ \quad -x^2-3x-1 & \end{array} \Rightarrow \frac{5x^3-x^2+2x-1}{x^3+x} = 5 - \frac{x^2+3x+1}{x^3+x} \qquad (1)$$

Descompongamos la fracción de (1) en fracciones simples:

$$x^3+x=0 \Rightarrow x(x^2+1)=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+1=0,\ \text{raíces imaginarias} \end{array}\right.$$

$$\frac{x^2+3x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} \Rightarrow x^2+3x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{para } x=0: & 1=A \\ \text{coef. de } x^2: & 1=A+B \\ \text{coef. de } x: & 3=C \end{array}\right| \Rightarrow A=1,\ B=0,\ C=3 \Rightarrow \frac{x^2+3x+1}{x^3+x} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2+1},\ \text{de donde:}$$

$$I = \int\left(5 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2+1}\right)dx = 5x - \log|x| - 3\ \text{arc tg}\ x$$

Calcular $\quad I = \int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx$ *(Univ. de Castilla – La Mancha 1991)*

$$x^2+2x+3=0 \Rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{4} = \frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}i}{2} = -1\pm\sqrt{2}i \Rightarrow$$
$$x^2+2x+3 = (x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i) = (x+1)^2-(\sqrt{2}i)^2 = (x+1)^2+2$$

Al ser imaginarias las raices del denominador, la integral se puede descomponer en dos, una del tipo logarítmico y la otra del tipo arco tangente.

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2-2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{-2}{(x+1)^2+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) - J \quad (1) \quad ; \quad J = \int\frac{1}{2+(x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (1): \quad I = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

METODO DE INTEGRACION POR PARTES.

Sean **u** y **v** dos funciones derivables y con derivada primera continua en el intervalo I, se verifica:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

Esta fórmula se llama de **integración por partes.**

La fórmula de integración por partes suele usarse en forma simplificada:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

y la mecánica que se sigue para calcular, por ejemplo, la integral $E = \int f(x)\cdot g(x)\,dx$ es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} u = f(x) \\ dv = g(x)\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = f'(x)\,dx \\ v = \int g(x)\,dx = G(x) \end{array} \quad \Rightarrow \quad E = f(x)\cdot G(x) - \int G(x)\cdot f'(x)\,dx$$

Se emplea en los casos en que la función a integrar contenga una función transcendente de derivada algebraica: $\log f(x)$, $\operatorname{arc\,sen} f(x)$, $\operatorname{arc\,cos} f(x)$, $\operatorname{arc\,tg} f(x)$, $\operatorname{arc\,ctg} f(x)$, ..., identificando u con la función trascendente.

Sea calcular $\quad I = \int x^n\cdot\log x\,dx$

$$\left.\begin{array}{l} u = \log x \\ dv = x^n\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x}\,dx \\ v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{array} \Rightarrow I = (\log x)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\log x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx =$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\log x - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

PROBLEMAS

10.1 Calcular $$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

(Univ. de Santiago)

$$I = \int (x-1)^{-2}\, dx = \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = \boxed{\frac{-1}{x-1}}$$

10.2 Calcular $$I = \int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$$

(Univ. de Murcia)

$$I = \int \frac{1+2x+x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}})\, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + 2\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \boxed{2x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}}$$

10.3 Calcular $$I = \int \frac{(\log x)^3}{x} dx$$

(Univ. de Granada)

$$I = \int (\log x)^3 \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{(\log x)^{3+1}}{3+1} = \boxed{\frac{1}{4}(\log x)^4}$$

10.4 Calcular $$I = \int \frac{\log x^2}{x}\, dx$$

(Univ. de Murcia)

$$I = \int \frac{2 \log x}{x}\, dx = 2\int (\log x)^1 \cdot \frac{1}{x}\, dx = 2\,\frac{(\log x)^{1+1}}{1+1} = \boxed{(\log x)^2}$$

10.5 Calcular $$I = \int \operatorname{sen}^2 3x \cdot \cos 3x \, dx$$

(Univ. de Valencia)

$$I = \frac{1}{3} \int (\operatorname{sen} 3x)^2 (\cos 3x \cdot 3) \, dx = \frac{1}{3} \frac{(\operatorname{sen} 3x)^{2+1}}{2+1} = \boxed{\frac{1}{9} (\operatorname{sen} 3x)^3}$$

10.6 Calcular $$I = \int \operatorname{tg} x \, dx$$

(Univ. de Santiago)

$$I = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx = \boxed{-\log |\cos x|}$$

10.7 Calcular $$I = \int \frac{x}{x^2+9} \, dx$$

(Univ. de Madrid)

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} \, dx = \boxed{\frac{1}{2} \log (x^2+9)}$$

10.8 Calcular $$I = \int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \, dx$$

(Univ. de La Laguna)

$$I = -\int \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \, dx = -\int \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)'}{(\operatorname{sen} x + \cos x)} \, dx = \boxed{-\log |\operatorname{sen} x + \cos x|}$$

10.9 Calcular $$I = \int \frac{3}{1 + 2\sqrt{e^{-x}}} \, dx$$

(Univ. de Murcia)

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{e^x}$.

$$I = \int \frac{3\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}+2} \, dx = 3 \cdot 2 \int \frac{e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{e^{\frac{x}{2}}+2} \, dx = \boxed{6 \log (e^{\frac{x}{2}}+2)}$$

10.10 Calcular $$I = \int \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}\, dx$$

(Univ. de Oviedo)

$$I = \int \frac{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}\, dx = \int \frac{2\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}\, dx = \int \left(\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} \right) dx =$$

$$= \int \frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx + \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = 2(-\log|\cos x|) + \log|\operatorname{sen} x| = -\log(\cos x)^2 + \log|\operatorname{sen} x| =$$

$$= \boxed{\log \frac{|\operatorname{sen} x|}{(\cos x)^2}}$$

10.11 Calcular $$I = \int x \cdot \cos(x^2 + 2)\, dx$$

(Univ. de La Laguna)

$$I = \frac{1}{2} \int \cos(x^2 + 2) \cdot (2x)\, dx = \boxed{\frac{1}{2} \operatorname{sen}(x^2 + 2)}$$

10.12 Calcular $$I = \int \operatorname{sen}^3 x\, dx$$

(Univ. de Alicante)

$$\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x - (\cos x)^2 \operatorname{sen} x \Rightarrow$$

$$I = \int \operatorname{sen} x\, dx + \int (\cos x)^2 (-\operatorname{sen} x)\, dx = -\cos x + \frac{(\cos x)^{2+1}}{2+1} = \boxed{-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x}$$

10.13 Calcular $$I = \int \left(2\operatorname{sen} x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

(Univ. de Madrid)

$$I = 2\int \operatorname{sen} x\, dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = 2(-\cos x) - \operatorname{tg} x = \boxed{-2\cos x - \operatorname{tg} x}$$

10.14 Calcular $$I = \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$$

(Univ. de La Laguna)

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}}\, dx = \boxed{\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} x^2}$$

10.15 Calcular $\quad I = \int \frac{x}{x^4 + 9}\,dx$

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

$$I = \frac{1}{9}\int \frac{x}{1 + \frac{x^4}{9}}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{x}{1 + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2}\,dx = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{\frac{2}{3}x}{1 + \left(\frac{x^2}{3}\right)^2}\,dx = \boxed{\frac{1}{6}\,\text{arc tg}\,\frac{x^2}{3}}$$

10.16 Calcular $\quad I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

(Univ. de Murcia)

Multiplicando numerador y denominador por e^x: $\quad I = \int \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}\,dx = \boxed{\text{arc tg}\,e^x}$

10.17 Calcular $\quad I = \int \frac{1 + x}{1 + x^2}\,dx$

(Univ. de Extremadura)

$$I = \int \frac{1}{1 + x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1 + x^2}\,dx = \boxed{\text{arc tg}\,x + \frac{1}{2}\log(1 + x^2)}$$

10.18 Calcular $\quad I = \int \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}\,dx$

(Univ. de Murcia)

Considerando que $x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1$:

$$I = \int \frac{(x + 1)^2 - 1}{(x + 1)^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{(x + 1)^2}\right)dx = x - \int (x + 1)^{-2}\,dx = x - \frac{(x + 1)^{-2+1}}{-2 + 1} = \boxed{x + \frac{1}{x + 1}}$$

10.19 Hallar la función $F(x)$ tal que $F(0) = 2$ y que sea primitiva de la función

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(Univ. de Madrid, 1991)

$$F(x) = \int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx = \log(e^x + 1) + C\,;\quad F(0) = 2 \Rightarrow \log(e^0 + 1) + C = 2\,;\quad C = 2 - \log 2$$

$$\boxed{F(x) = \log(e^x + 1) + 2 - \log 2}$$

10.20 Calcular $\qquad I = \int \frac{\cos x}{1-\cos x}\,dx$

(Univ. de Madrid)

$$\begin{array}{r|l} \cos x & -\cos x + 1 \\ \hline -\cos x + 1 & -1 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow I = \int\left(-1 + \frac{1}{1-\cos x}\right)dx = -x + \int \frac{1}{1-\cos x}\,dx \qquad (1)$$

y considerando que $1 - \cos x = 2\,\text{sen}^2\,\frac{x}{2}$: $\qquad \int \frac{1}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2\,\text{sen}^2\frac{x}{2}}\,dx =$

$$\int \frac{1}{\text{sen}^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}\,dx = -\,\text{ctg}\,\frac{x}{2} \quad \Rightarrow (1) \quad \boxed{I = -x - \text{ctg}\,\frac{x}{2}}$$

10.21 Determinar $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 24x$; $f''(0) = 2$, $f'(0) = 1$ y $f(0) = 0$.

(Univ. de Madrid)

$$f'''(x) = 24x \Rightarrow f''(x) = \int 24x\,dx = 24\,\frac{x^2}{2} + C = 12x^2 + C \Rightarrow f'(x) = \int (12x^2 + C)\,dx =$$

$$= 12\,\frac{x^3}{3} + Cx + D = 4x^3 + Cx + D \Rightarrow f(x) = \int (4x^3 + Cx + D)\,dx = 4\,\frac{x^4}{4} + C\,\frac{x^2}{2} + Dx + F$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow F = 0 \ ; \ f'(0) = 1 \Rightarrow D = 1 \ ; \ f''(0) = 2 \Rightarrow C = 2$$

de donde: $\boxed{f(x) = x^4 + x^2 + x}$

10.22 Calcular $\qquad I = \int \frac{x^2 + 10x + 5}{x^3 + 3x^2 - x - 3}\,dx$

(Univ. de Navarra)

Hallemos las raíces de $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$. Como la suma de los coeficientes es igual a 0, una raíz es 1. Rebajando de grado por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \underline{|0} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases} \\ x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x-1)(x+1)(x+3) \end{array}$$

Descomponiendo en fracciones simples: $\qquad \frac{x^2 + 10x + 5}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} \Rightarrow$

$$x^2 + 10x + 5 = A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1)$$

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{para } x = 1: & 16 = & 8A \\ \text{"} \quad x = -1: & -4 = & -4B \\ \text{"} \quad x = -3: & -16 = & 8C \end{array}\right| \Rightarrow A = 2 ,\ B = 1 ,\ C = -2 \Rightarrow$$

$$I = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+3} \right) dx = 2 \log |x-1| + \log |x+1| - 2 \log |x+3| =$$

$$= \log (x-1)^2 + \log |x+1| - \log (x+3)^2 = \boxed{\log \frac{(x-1)^2 |x+1|}{(x+3)^2}}$$

10.23 Calcular $\quad I = \displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx$

(Univ. de Castilla – La Mancha)
(Uinv. de Granada)

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 3x^3 \qquad - 3x - 2 & x^3 - x^2 - 2x \\ \cline{2-2} -x^4 + x^3 + 2x^2 & x - 2 \\ \hline \quad - 2x^3 + 2x^2 - 3x - 2 & \\ \quad\; 2x^3 - 2x^2 - 4x & \\ \hline \qquad\qquad - 7x - 2 & \end{array} \Rightarrow \frac{x^4 - 3x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x - 2 - \frac{7x + 2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \end{cases}$$

$$x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{7x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow 7x + 2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

para $x = 0$: $2 = -2A$; $A = -1$

" $x = 2$: $16 = 6B$; $B = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \Rightarrow I = \displaystyle\int \left(x - 2 + \frac{1}{x} - \frac{\frac{8}{3}}{x-2} + \frac{\frac{5}{3}}{x+1} \right) dx =$

" $x = -1$: $-5 = 3C$; $C = -\frac{5}{3}$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2} - 2x + \log |x| - \frac{8}{3} \log |x-2| + \frac{5}{3} \log |x+1|}$$

10.24 Calcular $\quad I = \displaystyle\int \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 6x + 10}\, dx$

(Univ. de Valencia, 1991)

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 6x + 9 & x^2 - 6x + 10 \\ \cline{2-2} -x^2 + 6x - 10 & 1 \\ \hline \qquad\quad -1 & \end{array} \Rightarrow \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 6x + 10} = 1 - \frac{1}{x^2 - 6x + 10} \Rightarrow$$

$$I = \int \left(1 - \frac{1}{x^2 - 6x + 10} \right) dx = x - \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10} \qquad (1)$$

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 40}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i \Rightarrow$$

$$x^2 - 6x + 10 = (x-3-i)(x-3+i) = (x-3)^2 - i^2 = (x-3)^2 + 1$$

de donde: $$I = x - \int \frac{dx}{1+(x-3)^2} = \boxed{x - \text{arc tg}\,(x-3)}$$

10.25 Encontrar una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^3+x}$

(Univ. de Barcelona)

$$x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2+1) = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2+1 = 0 \quad \text{(raices imaginarias)} \end{array}\right.$$

$$\frac{x^2-x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow x^2 - x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para } x = 0: & & 1 = A \\ \text{coef. de } x^2: & & 1 = A+B \\ \text{'' '' } x: & & -1 = C \end{array}\right| \Rightarrow A = 1,\ B = 0,\ C = -1 \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^2-x+1}{x^3+x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \boxed{\log|x| - \text{arc tg}\,x}$$

10.26 Calcular $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

(Univ. de Cádiz)

1 es raiz de $x^3 - 1 = 0$ ya que $1^3 - 1 = 0$. Rebajando de grado por Rufini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)\,;\ x^2+x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \Rightarrow 1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para } x = 1: & & 1 = A \cdot 3 \\ \text{coef. de } x^2: & & 0 = A+B \\ \text{para } x = 0: & & 1 = A - C \end{array}\right| \Rightarrow A = \frac{1}{3}\,;\ B = -\frac{1}{3}\,;\ C = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x-2}{x^2+x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}J \quad \text{(1); siendo } J = \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$$

J se descompone en dos integrales, una del tipo logarítmico y otra del tipo arco tangente:

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2+x+1}\,dx =$$

$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{3}{2}K$ (2) ; y considerando que $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$:

$$K = \int \frac{1}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx = \frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx =$$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$; llevando este resultado a (2) y a (1):

$$\boxed{I = \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}$$

10.27 Calcular $I = \int \frac{dx}{x\left((\log x)^3 - 2(\log x)^2 - \log x + 2\right)}$

(Univ. de Valladolid)

Haciendo el cambio $t = \log x$: $dt = \frac{1}{x}\,dx$:

$$I = \int \frac{1}{(\log x)^3 - 2(\log x)^2 - \log x + 2}\cdot\frac{dx}{x} = \int \frac{1}{t^3-2t-t+2}\,dt$$

Hallemos las raíces de $t^3 - 2t - t + 2 = 0$. Como la suma de los coeficientes es igual a 0, 1 es raíz. Rebajando de grado por Rufini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow t^2-t-2=0 \Rightarrow t = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$t^3-2t-t+2 = (t-1)(t-2)(t+1)$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{(t-1)(t-2)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{t+1} \Rightarrow$$

$$1 = A(t-2)(t+1) + B(t-1)(t+1) + C(t-1)(t-2)$$

para $t = 1$: $1 = A(-1)\cdot 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

" $t = 2$: $1 = B\cdot 1\cdot 3 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$

" $t = -1$: $1 = C(-2)(-3) \Rightarrow C = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow I = \int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{\frac{1}{3}}{t-2} + \frac{\frac{1}{6}}{t+1}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\log|t-1| + \frac{1}{3}\log|t-2| + \frac{1}{6}\log|t+1| =$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}\log|\log x - 1| + \frac{1}{3}\log|\log x - 2| + \frac{1}{6}\log|\log x + 1|}$$

10.28 Calcular $I = \int (x^2 - 2x - 3) \log x \, dx$

(Univ. de Madrid)

$$\left.\begin{array}{l} u = \log x \\ dv = (x^2 - 2x - 3)dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x}\,dx \\ v = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - 3x \end{array} \Rightarrow I = (\log x)\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right) -$$

$$-\int\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\frac{dx}{x} = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\log x - \int\left(\frac{1}{3}x^2 - x - 3\right)dx =$$

$$= \boxed{\left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\log x - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x}$$

10.29 Calcular $f(x)$ de manera que $f'(x) = \log(4x^2+1)$ y $f(0) = 0$.

(Univ. de Madrid)

$f'(x) = \log(4x^2+1) \Rightarrow f(x)$ es una primitiva de $\log(4x^2+1)$: $f(x) = \int \log(4x^2+1)\,dx$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = \log(4x^2+1) \\ dv = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \frac{8x}{4x^2+1}\,dx \\ v = x \end{array} \Rightarrow f(x) = [\log(4x^2+1)]x - \int x\,\frac{8x}{4x^2+1}\,dx \quad (1)$$

$$\begin{array}{r|l} 8x^2 & 4x^2+1 \\ \hline -8x^2 - 2 & 2 \\ -2 & \end{array} \Rightarrow \int \frac{8x^2}{4x^2+1}\,dx = \int\left(2 - \frac{2}{4x^2+1}\right)dx = 2x - \int \frac{2}{1+(2x)^2}\,dx =$$

$$= 2x - \operatorname{arc\,tg} 2x + C$$

llevando este valor a (1): $f(x) = x \cdot \log(4x^2+1) - 2x + \operatorname{arc\,tg} 2x + C$

Como $f(0) = 0$: $f(0) = 0 \cdot \log 1 - 0 + \operatorname{arc\,tg} 0 + C = C = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{f(x) = x \cdot \log(4x^2+1) - 2x + \operatorname{arc\,tg} 2x}$$

10.30 Calcular $I = \int x \cdot \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

(Univ. Islas Baleares, 1991)

$$\left.\begin{array}{l} u = \operatorname{arc\,tg} x \\ dv = x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \Rightarrow I = \operatorname{arc\,tg} x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx \qquad \begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \underline{-x^2-1} & 1 \\ -1 & \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \boxed{\frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\,(x - \operatorname{arc\,tg} x)}$$

10.31 Calcular $\quad I = \int e^{-x} \cdot \cos x \cdot dx.$

(Univ. de Islas Baleares)

Integrando por partes, dos veces:

$$\left.\begin{array}{l} u = e^{-x} \\ dv = \cos x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = e^{-x}(-1)\,dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{array} \Rightarrow I = e^{-x} \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot e^{-x}(-1)\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = e^{-x} \\ dv = -\operatorname{sen} x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = e^{-x}(-1)\,dx \\ v = \cos x \end{array} \Rightarrow I = e^{-x} \operatorname{sen} x - \left(e^{-x} \cos x - \int \cos x \cdot e^{-x}(-1)\,dx\right) =$$

$$= e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x) - I \; ; \quad 2I = e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x) \; ;$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} e^{-x}(\operatorname{sen} x - \cos x)}$$

10.32 Calcular $\quad I = \int x^2 \cos x\,dx \quad ; \quad J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$

(Univ. de Zaragoza)

Integrando por partes, dos veces:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2x\,dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{array} \Rightarrow I = x^2 \operatorname{sen} x - \int (\operatorname{sen} x)\, 2x\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2dx \\ v = -\cos x \end{array} \Rightarrow I = x^2 \operatorname{sen} x - \left(2x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,2\,dx\right) =$$

$$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx = \boxed{x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x}$$

La integral J es inmediata del tipo $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx = \operatorname{tg} f(x)$: $\displaystyle J = 2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2\sqrt{x}}\,dx = 2\operatorname{tg}\sqrt{x}$

Se puede calcular también aplicando el método de sustitución: $\sqrt{x} = t \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt$;

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,dt \Rightarrow J = \int \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{\cos^2 t}\,2\,dt = 2\operatorname{tg} t = \boxed{2\operatorname{tg}\sqrt{x}}$$

10.33 Calcular $\quad I = \int x \cdot e^{4x}\, dx$

(Univ. de Granada)

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{4x}\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array} \Rightarrow I = x \cdot \frac{1}{4}e^{4x} - \int \frac{1}{4}e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}\,xe^{4x} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}e^{4x} = \boxed{\frac{1}{4}\,e^{4x}\left(x - \frac{1}{4}\right)}$$

10.34 Calcular $\quad I = \int x^2\, e^{2x}\, dx$

(Univ. de Cantabria, 1991)

Integrando por partes, dos veces:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = e^{2x}\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2x\,dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \Rightarrow I = x^2 \cdot \frac{1}{2}\,e^{2x} - \int \frac{1}{2}\,e^{2x} \cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\,x^2 e^{2x} - \int x\,e^{2x}\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{2x}\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\,x^2 e^{2x} - \left(x \cdot \frac{1}{2}\,e^{2x} - \int \frac{1}{2}\,e^{2x}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}\,xe^{2x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,e^{2x} = \boxed{\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)}$$

10.35 Calcular $\quad I = \int x^3\, e^{-x^2}\, dx$

(Univ. de Madrid)

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = xe^{-x^2}\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2x\,dx \\ v = \frac{-1}{2}\int e^{-x^2}(-2x)\,dx = \frac{-1}{2}\,e^{-x^2} \end{array} \Rightarrow$$

$$I = -\frac{1}{2}\,x^2\,e^{-x^2} - \int -\frac{1}{2}\,e^{-x^2} \cdot 2x\,dx = -\frac{1}{2}\,x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}\int e^{-x^2}\,(-2x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}\,e^{-x^2} = \boxed{-\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\,(x^2 + 1)}$$

10.36 Calcular $\quad I = \int \text{sen}\,(\log x)\, dx$

(Univ. de Sevilla)

Integrando por partes, dos veces:

$$\left.\begin{array}{l} u = \operatorname{sen}(\log x) \\ dv = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \cos(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ v = x \end{array} \Rightarrow I = \operatorname{sen}(\log x)\cdot x - \int x\cdot\cos(\log x)\,\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\cdot\operatorname{sen}(\log x) - \int \cos(\log x)\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos(\log x) \\ dv = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = -\operatorname{sen}(\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ v = x \end{array} \Rightarrow I = x\cdot\operatorname{sen}(\log x) - \Big(\cos(\log x)\,x -$$

$$-\int x\left(-\operatorname{sen} x(\log x)\,\frac{1}{x}\right)dx\Big) = x\cdot\operatorname{sen}(\log x) - x\cdot\cos(\log x) - \int \operatorname{sen}(\log x)\,dx \Rightarrow$$

$$I = x\cdot\operatorname{sen}(\log x) - x\cdot\cos(\log x) - I \Rightarrow 2I = x\cdot\operatorname{sen}(\log x) - x\cdot\cos(\log x) \Rightarrow$$

$$\boxed{I = \frac{x}{2}\big(\operatorname{sen}(\log x) - \cos(\log x)\big)}$$

10.37 Calcular $\quad I = \int \frac{\sqrt{7+2\,\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

(Univ. de Madrid, 1991)

$$I = \frac{1}{2}\int (7+2\,\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(7+2\,\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \boxed{\frac{1}{3}(7+2\,\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{2}}}$$

10.38 Hallar una función $F(x)$ que verifique, para $x \neq 0$:

$$x^5 F'(x) + x^3 + 2x = 3$$

(Univ. de Madrid, 1991)

$$F'(x) = \frac{3-x^3-2x}{x^5} = 3x^{-5} - x^{-2} - 2x^{-4} \Rightarrow F(x) = \int (3x^{-5} - x^{-2} - 2x^{-4})\,dx =$$

$$= 3\,\frac{x^{-4}}{-4} - \frac{x^{-1}}{-1} - 2\,\frac{x^{-1}}{-1} - 2\,\frac{x^{-3}}{-3} + C = \boxed{-\frac{3}{4x^4} + \frac{1}{x} + \frac{2}{3x^3} + C}$$

CAPITULO 11

INTEGRALES DEFINIDAS AREAS Y VOLUMENES

FUNCIONES ESCALONADAS.

Sea $I = [a, b]$ un intervalo compacto (cerrado y acotado) de $\mathbf{R}$. Se llama **partición** de I a toda sucesión finita de números reales pertenecientes a I, y estrictamente creciente, siendo el primer término de la sucesión a y el último b.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Esta partición se simboliza por $P = (a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b)$

Los intervalos $]x_{i-1}, x_i[$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ son llamados los intervalos de la partición.

Llamaremos $\mathscr{P}$ al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

Se dice que la función $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ es **escalonada** si existe una partición P de $[a, b]$ tal que f sea constante en el interior de cada uno de los intervalos de la partición.

Una partición P de $[a, b]$ se dice *adaptada o asociada* a la función f, si f es constante en cada uno de los intervalos abiertos de P.

INTEGRAL DE UNA FUNCION ESCALONADA.

Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una función escalonada, P una partición de $[a, b]$ adaptada a f y λ_i el valor de f en $]x_{i-1}, x_i[$ se llama **integral de f en el intervalo** $[a, b]$ al número real

$$(x_1 - x_0) \cdot \lambda_1 + (x_2 - x_1) \cdot \lambda_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \cdot \lambda_n$$

y se simboliza por $\int_a^b f(x)\,dx$.

Este número es independiente de la partición P de $[a, b]$ adaptada a f, sólo depende de f y del intervalo $[a, b]$. La letra x, que no figura en el resultado, puede ser sustituida por otra letra, así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \cdots$$

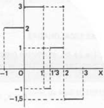
Dada la función $f:\ [-1,3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \forall x \in [-1,0] \\ 3 & \forall x \in]0,1] \\ -1 & \forall x \in [1, 1'3] \\ 1 & \forall x \in]1'3, 2[\\ 3 & \text{para } x = 2 \\ -1'5 & \forall x \in]2,3] \end{cases}$$

se pide: 1º) Representar gráficamente la función.

2º) Calcular $\quad I = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

1º) La gráfica es la de la figura adjunta.



2º) Por ser una función escalonada:

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = [0-(-1)]\cdot 2 + (1-0)\cdot 3 + (1'3-1)\cdot(-1) + (2-1'3)\cdot 1 + (3-2)\cdot(-1'5) = 2 + 3 - 0'3 + 0'7 - 1'5 = 3'9$$

PROPIEDADES: Sean f y g dos funciones escalonadas en $[a,b]$:

– si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$: $\quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

– si $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq g(x)$: $\quad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

– si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$: $\quad \int_a^b \left(\lambda\cdot f(x) + \mu\cdot g(x)\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$

– $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

– si f es escalonada en $[a,c]$ y en $[c,b]$,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

INTEGRAL INFERIOR E INTEGRAL SUPERIOR DE UNA FUNCION ACOTADA. FUNCIONES INTEGRABLES.

Sea la función $f: [a, b] \to R$, acotada, y $P = (a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b)$ una partición de $[a, b]$.

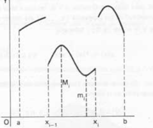
Llamemos m_i y M_i a los extremos inferior y superior de f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, es decir:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad ; \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

A la función f y a la partición P les asociamos dos funciones escalonadas $u: [a, b] \to R$ y $v: [a, b] \to R$ definida de la siguiente forma:

$$u(x) = m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$v(x) = M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$



Las integrales de las funciones escalonadas u y v en el intervalo $[a, b]$ son:

$$s_P = \int_a^b u(x)\,dx = (x_1 - a)\cdot m_1 + (x_2 - x_1)\cdot m_2 + \cdots + (b - x_{n-1})\cdot m_n$$

$$S_P = \int_a^b u(x)\,dx = (x_1 - a)\cdot M_1 + (x_2 - x_1)\cdot M_2 + \cdots + (b - x_{n-1})\cdot M_n$$

y se les llama *sumas de Darboux* de la función f asociadas a la partición P.

Al extremo superior del conjunto de los números reales s_P, $(P \in \mathscr{P})$, se le llama **integral inferior** de f en $[a, b]$ y se simboliza por $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Al extremo inferior del conjunto de los números reales S_P, $(P \in \mathscr{P})$, se le llama **integral superior** de f en $[a, b]$ y se simboliza por $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Se dice que la función $f: [a, b] \to R$ es **integrable** (en el sentido de Riemann) si la integral inferior de f en $[a, b]$ es igual a la integral superior de f en $[a, b]$, y a su valor común se le llama **integral definida de la función f en el intervalo** $[a, b]$, se simboliza por

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

(La letra x puede ser sustituida por cualquier otra letra)

La función acotada $f: [a,b] \to R$ es **integrable en** $[a,b]$ si y solo si, para todo $\epsilon > 0$, existe una partición P de $[a,b]$, tal que existen dos funciones escalonadas u y v sobre $[a,b]$, tales que

$$u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x) \quad \forall x \in [a,b] \quad y \quad \int_a^b v(x)\,dx - \int_a^b u(x)\,dx < \epsilon$$

La función acotada $f: [a,b] \to R$ es **integrable** (en el sentido de Riemann) en $[a,b]$ si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$, tal que a toda partición P que cumpla la condición de que la mayor amplitud de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ sea menor que η, se le puedan asociar dos funciones escalonadas u y v sobre $[a,b]$, tales que

$$u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x) \quad \forall x \in [a,b] \quad y \quad \int_a^b v(x)\,dx - \int_a^b u(x)\,dx < \epsilon$$

Se llama **suma de Riemann** asociada a la función $f: [a,b] \to R$ y a la partición P de $[a,b]$, a toda expresión de la forma

$$(x_1 - a)\cdot f(\xi_1) + (x_2 - x_1)\cdot f(\xi_2) + \cdots + (x_i - x_{i-1})\cdot f(\xi_i) + \cdots + (b - x_{n-1})\cdot f(\xi_n)$$

donde $\xi_i \in [x_i - x_{i-1}]$.

La función $f: [a,b] \to R$, acotada, es **integrable** en el sentido de Riemann y admite por integral el número real $I = \int_a^b f(x)dx$ si y sólo si:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists P(\text{partición de } [a,b]) \;/\; \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \left|\sum_{i=0}^{n} (x_i - x_{i-1})\cdot f(\xi_i) - I\right| < \epsilon$$

Sea P_η el conjunto de las particiones de $[a,b]$ en las que la mayor amplitud de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ sea menor que η. La función $f: [a,b] \to R$, acotada, es **integrable** en el sentido de Riemann y admite por integral el número real $I = \int_a^b f(x)\,dx$ si y sólo si:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \;/\; \forall P \in P_\eta \quad y \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad \left|\sum_{i=0}^{n} (x_i - x_{i-1})\cdot f(\xi_i) - I\right| < \epsilon$$

Se dice, impropiamente, que la función acotada $f: [a,b] \to R$ es **integrable** en el sentido de Riemann si, y sólo si, las sumas de Riemann asociadas a f y a la partición P de $[a,b]$, tienen todas el mismo límite I cuando la mayor amplitud de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tiende a cero.

Las funciones escalonadas, las funciones monótonas, las funciones continuas, las funciones continuas por secciones son integrables en el sentido de Riemann.

Si la función $f: [a,b] \to R$ es integrable en el sentido de Riemann, considerando la partición de $[a,b]$ en n intervalos de igual amplitud, $\frac{b-a}{n}$:

$$P = \{x_0 = a,\; x_1 = \frac{b-a}{n},\; x_2 = 2\frac{b-a}{n}, \ldots, x_i = i\,\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = b\}$$

se tendrá que cuando $n \to \infty$, $\frac{b-a}{n} \to 0$, de donde:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

y también: $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left(f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2\,\frac{b-a}{n}\right) + \cdots + f\left(a + n\,\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

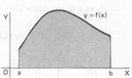
En lo sucesivo diremos "integrable" por "integrable en sentido de Riemann" e "integral" por "integral de Riemann".

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA INTEGRAL.

Sea el plano afín real euclídeo y $\{O, u_1, u_2\}$ un sistema de referencia ortonormal de ejes OX y OY.

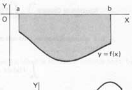
Si la función $f: [a, b] \to R$, es positiva e integrable, el área del recinto del plano determinado por los puntos de coordenadas (x, y) tales que

$$\left.\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{array}\right\}$$



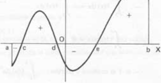
es igual al número real $\int_a^b f(x)\,dx$.

Es decir, $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área limitada por el eje OX, las rectas $x = a$, $x = b$, y la curva $y = f(x)$.



Si la función $f: [a, b] \to R$, es negativa, el área limitada por el eje OX, las rectas $x = a$, $x = b$, y la curva $y = f(x)$ es igual a

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

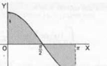


Si la función f no tiene signo constante en $[a, b]$, para hallar el área comprendida entre el eje OX, las rectas $x = a$, $x = b$, y la curva $y = f(x)$, es necesario conocer los puntos de corte de la curva con el eje OX y el signo que tiene la función en cada intervalo:

$$\text{Area} = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx - \int_d^e f(x)\,dx + \int_e^b f(x)\,dx$$

Sea calcular el área encerrada por el eje OX, las rectas $x = 0$ y $x = \pi$, y la curva $y = \cos x$.

De la representación gráfica se deduce:



$$\text{Area pedida} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx =$$

$$= \left[\operatorname{sen} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\operatorname{sen} x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (1-0) - (0-1) = 2$$

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES

Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$, $a < b$:

– si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$: $\quad \int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$

– si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant g(x)$: $\quad \int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx$

– si $(\lambda, \mu) \in R^2$: $\quad \int_a^b \left(\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$

– $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$

– Relación de Chasles: $\quad \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx, \quad \forall c \in [a, b]$

– si f es integrable en un intervalo compacto y los números reales a, b y c pertenecen a este intervalo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

– $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$

– $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

– si f es continua y positiva: $\quad \int_a^b f(x)\, dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

– si f es una función acotada e integrable en $[a, b]$, se llama *valor medio* de f en $[a, b]$ a

$$\boxed{\mu = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a}}$$

– **Teorema de la media:** Si f es una función continua en [a, b], existe un $c \in [a, b]$ tal que

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c)}$$

– $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

– si f es una función periódica de periodo T:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{nT} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx = \int_{\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(x)\,dx$$

– si f es una función par y periódica de periodo T: $\displaystyle\int_0^T f(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx$

– si f es una función par y continua en $[-a, a]$: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

– si f es una función impar y continua en $[-a, a]$: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

RELACION ENTRE PRIMITIVA E INTEGRAL

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada e integrable en $[a, b]$. A la función F definida en $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

se le llama **función integral de la función f correspondiente al punto a**.

Se verifica: 1° La función F es continua en [a, b].
2° Si f es continua en [a, b], F es derivable en [a, b] y $\forall x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$.

La función F es una primitiva de la función f en [a, b]. Es la única primitiva de f que se anula en a:

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Regla de Barrow: Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y F es una primitiva cualquiera de f en [a, b]:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

El cálculo de una integral se lleva, por la regla de Barrow, al cálculo de primitivas.

Calcular $$I = \int_{-1}^{1} (x^3 + \text{sen}\, x)\, dx$$ *(Univ. de Santiago)*

La función $f: [-1, 1] \to R$ definida por $f(x) = x^3 + \text{sen}\, x$ es continua, de donde:

$$I = \left[\frac{x^4}{4} - \cos x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1^4}{4} - \cos 1\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \cos(-1)\right) = \frac{1}{4} - \cos 1 - \frac{1}{4} + \cos 1 = 0$$

Integración por partes: Si u y v son dos funciones derivables y con derivada continua en el intervalo $[a, b]$, se verifica:

$$\boxed{\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\, dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\, dx}$$

Calcular $$I = \int_2^3 x\, e^{-2x}\, dx$$ *(Univ. de Córdoba)*

$$\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = e^{-2x} & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \Rightarrow I = \left[-\frac{1}{2}x\, e^{-2x}\right]_2^3 - \int_2^3 \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) dx = \left(-\frac{1}{2}3\, e^{-6}\right) - \left(-\frac{1}{2}2\, e^{-4}\right) -$$

$$-\left[\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_2^3 = -\frac{1}{2}(3e^{-6} - 2e^{-4}) - \left(\frac{1}{4}e^{-6} - \frac{1}{4}e^{-4}\right) = -\frac{7}{4}e^{-6} + \frac{5}{4}e^{-4}$$

Integración por cambio de variable: Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, y **g** una función biyectiva del intervalo $[\alpha, \beta]$ en el intervalo $[a, b]$, derivable y con derivada continua, definida por $x = g(t)$, y tal que $a = g(\alpha)$ y $b = g(\beta)$, se verifica:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f[g(t)]\cdot g'(t)\, dt$$

Calcular $$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\cdot \text{sen}\,(x^2)\, dx$$ *(Univ. de Santiago)*

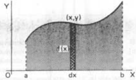
Haciendo el cambio $x^2 = t$: para $x = 0$, $t = 0$; para $x = \sqrt{\pi/2}$, $t = \pi/2$; $2x\, dx = dt$:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\, t\, dt = \frac{1}{2}\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left((-\cos\frac{\pi}{2}) - (-\cos 0)\right) = \frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$$

AREAS DE FIGURAS PLANAS

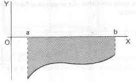
Sea f una función positiva e integrable en el intervalo [a, b]. El área del plano comprendida entre la gráfica de $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje OX es:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

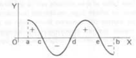


Si f es una función negativa en [a, b]:

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$



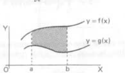
Si f cambia de signo en [a, b], la fórmula (1) da la suma algebraica de las áreas situadas por encima y por debajo del eje OX. En este caso se obtienen las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ pertenecientes al intervalo [a, b], raíces que serán los extremos de los intervalos en que f tiene signo constante, y se hallan las áreas en cada uno de estos intervalos. Se tendrá, en el ejemplo de la figura adjunta:

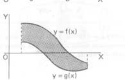


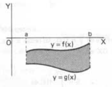
$$S = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^e f(x)\,dx - \int_e^b f(x)\,dx$$

El área comprendida entre las rectas $x = a$, $x = b$ y las gráficas de las funciones f y g, tales que $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, es igual a

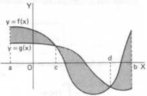
$$\int_a^b \Big(f(x) - g(x) \Big)\,dx$$





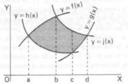


Si $f(x) - g(x)$ no tiene signo constante en $[a, b]$, es decir, las gráficas se cortan, hay que hallar las abscisas de los puntos de corte obteniendo las raíces de la ecuación $f(x) - g(x) = 0$ pertenecientes al intervalo $[a, b]$. De esta manera obtendremos los extremos de los intervalos en que $f(x) - g(x)$ tiene signo constante. En el caso de la figura adjunta se tendrá:



$$S = \int_a^c \left(f(x) - g(x)\right) dx + \int_c^d \left(g(x) - f(x)\right) dx + \int_d^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

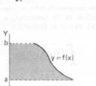
Para hallar el área limitada por varias curvas se obtiene, en primer lugar, las abscisas (u ordenadas) de los puntos del contorno intersección de cada dos curvas, que nos determinarán los extremos de los distintos intervalos de integración. En la figura:



$$S = \int_a^b \left(f(x) - h(x)\right) dx + \int_b^c \left(j(x) - h(x)\right) dx + \int_c^d \left(j(x) - g(x)\right) dx$$

El área del plano comprendida entre la gráfica de $y = f(x)$, las rectas $y = a$, $y = b$ y el eje OY es:

$$S = \int_a^b x \, dy$$

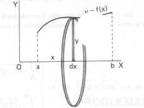


Habrá que expresar x en función de y, pudiendo presentarse todos los casos que hemos considerado anteriormente.

VOLUMENES

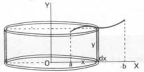
El volumen del cuerpo engendrado al girar 360° alrededor del eje OX la parte del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje OX es:

$$V = \int_a^b \pi y^2\,dx = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$



Si el giro se realiza alrededor del eje OY:

$$V = \int_a^b 2\pi x y\,dx = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$$



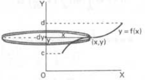
El volumen del cuerpo engendrado al girar 360° alrededor del eje OX la parte del plano comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, siendo $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$, es:

$$V = \pi \int_a^b \left(\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right) dx$$

Si el giro se realiza alrededor del eje OY: $\quad V = 2\pi \int_a^b x\left(f(x) - g(x)\right) dx$

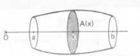
El volumen del cuerpo engendrado al girar 360° alrededor del eje OY la parte del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas $y = c$, $y = d$ y el eje OY es:

$$V = \int_c^d \pi x^2\,dy$$



El volumen de un cuerpo del que se puede conocer el área $A(x)$ de la sección transversal del cuerpo, perpendicular a una dirección dada, en función de la distancia x de dicha sección a un punto dado O es:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

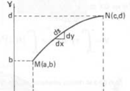


siendo a y b las distancias del punto O a las secciones extremas.

LONGITUD DEL ARCO DE UNA CURVA PLANA.

Sea f una función derivable y con derivada continua en el intervalo $[a, b]$. La longitud s del arco de la curva $y = f(x)$ comprendido entre los puntos $M(a, b)$ y $N(c, d)$ es:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \;\Rightarrow\; s = \left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_a^c \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \\ \displaystyle\int_b^d \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy \end{array} \right.$$



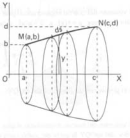
AREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCION

Area de la superficie engendrada al girar 360° alrededor del eje OX el arco de la curva $y = f(x)$ comprendido entre los puntos $M(a,b)$ y $N(c,d)$:

$$dS = 2\pi\, y\, ds = 2\pi\, y \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} =$$

$$= 2\pi\, y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \;\Rightarrow$$

$$S = 2\pi \int_a^c f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



Si el giro se realiza alrededor del eje OY:

$$dS = 2\pi x\, ds \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} \displaystyle S = 2\pi \int_a^c x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ \displaystyle S = 2\pi \int_b^d f^{-1}(y) \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy \end{array} \right.$$

PROBLEMAS

11.1 Calcular $$I = \int_0^1 (2-x)^4 \, dx$$

(Univ. de Barcelona, 1991)

Es una integral inmediata:

$$I = -\int_0^1 (2-x)^4 (-1)\, dx = -\left[\frac{(2-x)^{4+1}}{x+1}\right]_0^1 = -\left(\frac{(2-1)^5}{5} - \frac{(2-0)^5}{5}\right) = -\frac{1}{5} + \frac{32}{5} = \boxed{\frac{31}{5}}$$

11.2 Representando por $|x|$ el valor absoluto de x, calcular $$I = \int_{-1}^3 |x|\, dx$$

(Univ. de Madrid)

Considerando que $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$I = \int_{-1}^0 (-x)\, dx + \int_0^3 x\, dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \boxed{5}$$

11.3 Calcular $$I = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\, dx$$

(Univ. de Madrid)

La función $f\colon [2, 3] \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ es continua.

$$I = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\left[\log|x^2-1|\right]_2^3 = \frac{1}{2}\left(\log(9-1) - \log(4-1)\right) = \boxed{\frac{1}{2}\log\frac{8}{3}}$$

11.4 Calcular $$I = \int_{-1}^{1}\left(x-3+\frac{1}{x-2}\right)dx$$

(Univ. de Madrid)

La función $f: [-1, 1] \to R$ definida por $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2}$ es continua.

$$I = \left[\frac{x^2}{2} - 3x + \log|x-2|\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1^2}{2} - 3\cdot 1 + \log|1-2|\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} - 3(-1) + \log|-1-2|\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - 3 + \log 1 - \frac{1}{2} - 3 - \log 3 = \boxed{-6 - \log 3}$$

11.5 Calcular $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x \, dx$$

(Univ. de Madrid)

Considerando que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$: $\quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 x - 1) \operatorname{sen} x \, dx =$

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2(-\operatorname{sen} x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx = -2\left[\frac{(\cos x)^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -2\left(\frac{\cos^3 \frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\cos^3 0}{3}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) = -2\left(\frac{0}{3} - \frac{1}{3}\right) + 0 - 1 = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

11.6 Calcular $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria, 1991)

En el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ no se anula el denominador.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot \cos^2} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} dx = \left[\log \operatorname{tg} x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \log \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \log \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \log\sqrt{3} - \log\frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$= \log\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \boxed{\log 3}$$

11.7 Calcular $$I = \int_4^5 \frac{x^3}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)} dx$$

(Univ. de Valladolid)

No hay ningún valor real de x que anule el denominador.

Como en el denominador sólo hay potencias pares y en el numerador potencias impares, se hace el cambio:

$$x^2 = y \Rightarrow 2x\,dx = dy\,;\ \text{para } x = 4,\ y = 16\,;\ \text{para } x = 5,\ y = 25:$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{16}^{25} \frac{y}{(y+1)(y+4)(y+9)}\,dy$$

Descomponiendo en fracciones simples: $\dfrac{y}{(y+1)(y+4)(y+9)} = \dfrac{A}{y+1} + \dfrac{B}{y+4} + \dfrac{C}{y+9} \Rightarrow$

$$y = A(y+4)(y+9) + B(y+1)(y+9) + C(y+1)(y+4)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{para} & y=-1: & -1 = A\cdot 3\cdot 8 \\ \text{"} & y=-4: & -4 = B(-3)\cdot 5 \\ \text{"} & y=-9: & -9 = C(-8)(-5) \end{array}\right| \Rightarrow A = \frac{-1}{24}\ ;\ B = \frac{4}{15}\ ;\ C = \frac{-9}{40} \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{16}^{25}\left(\frac{\frac{-1}{24}}{y+1} + \frac{\frac{4}{15}}{y+4} + \frac{\frac{-9}{40}}{y+9}\right)dy = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{24}\log|y+1| + \frac{4}{15}\log|y+4| - \frac{9}{40}\log|y+9|\right]_{16}^{25} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{24}\log 26 + \frac{4}{25}\log 29 - \frac{9}{40}\log 34\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{24}\log 17 + \frac{4}{25}\log 20 - \frac{9}{40}\log 25\right) =$$

$$= \boxed{\frac{-1}{48}\log\frac{26}{17} + \frac{2}{25}\log\frac{29}{20} - \frac{9}{80}\log\frac{34}{25}}$$

11.8 Calcular $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (1+x^2)\cos x\,dx$

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria, 1991)

Aplicando el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = 1+x^2 \\ dv = \cos x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2x\,dx \\ v = \operatorname{sen} x \end{array} \Rightarrow I = \left[(1+x^2)\operatorname{sen} x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \operatorname{sen} x\,dx = 0 - \int_0^{\pi} 2x\operatorname{sen} x\,dx$$

volviendo a integrar por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2dx \\ v = -\cos x \end{array} \Rightarrow I = -\Big[(2x)(-\cos x)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2(-\cos x)\,dx =$$

$$= -2\pi + \Big[2(-\operatorname{sen} x)\Big]_0^{\pi} = \boxed{-2\pi}$$

11.9 Sea $a = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen}^2 x\,dx$, y $b = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$

Calcular $a+b$ y $a-b$, y obtener los valores de a y b.

(Univ. de Madrid)

Considerando que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, y $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$:

$$a + b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$a - b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos 2x\,dx$$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos 2x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \end{array} \Rightarrow a - b = -\left[\frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\,dx =$$

$$= 0 + \left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b = \frac{\pi^2}{8} \\ a - b = \frac{1}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2a = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \Rightarrow a = \boxed{\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}} \\ \text{Restando: } 2b = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow b = \boxed{\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}} \end{array}$$

11.10 Siendo $\quad I(x) = \int_0^x t^2 e^{-t}\,dt$

demostrar que $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = 2$.

(Univ. de Alicante)

Aplicando el método de integración por partes, dos veces:

$$\left.\begin{array}{l} u = t^2 \\ dv = e^{-t}\,dt \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2t\,dt \\ v = -e^{-t} \end{array} \Rightarrow I(x) = \left[-t^2 \cdot e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x (-e^{-t})\,2t\,dt$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 2t \\ dv = -e^{-t}dt \end{array}\right| \begin{array}{l} du = 2dt \\ v = e^{-t} \end{array} \Rightarrow I(x) = -x^2 e^{-x} - \left(\left[2t \cdot e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x e^{-t}\,2\,dt\right) =$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - \left[2e^{-t}\right]_0^x = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2 = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + 2\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 - 2x - 2}{e^x} + 2 \qquad (1)$$

Este límite es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando la regla de L'Hopital, dos veces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 - 2x - 2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x - 2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{e^x} = \left(\frac{-2}{\infty}\right) = 0$$

llevando este valor a (1) resulta: $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = 0 + 2 = \boxed{2}$

11.11 Sabemos que $f(a) = f(b)$ para una cierta función f, y también que su derivada f' es continua en R. Hallar el valor de

$$I = \int_a^b f'(x)\, dx.$$

(Univ. de Alicante)

Si f' es continua, f es una primitiva de f', de donde: $I = \Big[f(x)\Big]_a^b = f(b) - f(a) = \boxed{0}$

11.12 Sabiendo que $\int_a^b f(x)\, dx = 0$, ¿podemos asegurar que $a = b$?

(Univ. de León)

Si la función f es la función nula, cualquiera que sean a y b, se verificará la igualdad del enunciado.

Si f es una función impar, es decir, se verifica que $f(-x) = -f(x)$, se tiene: $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

En efecto, haciendo el cambio $x = -t$: $dx = -dt$; para $x = a$, $t = -a$; para $x = -a$, $t = a$, y como $f(-t) = f(t)$:

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{a}^{-a} f(-t)(-dt) = -\int_{a}^{-a} [-f(t)]\, dt = -\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

Si f es una función cuya curva es simétrica respecto del punto $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ también se verificaría la igualdad del enunciado sin que fuera $a = b$.

11.13 Dada la función $f: [0, 3] \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$ comprobar la verificación del teorema del valor medio del cálculo integral.

(Univ. de Santiago)

Como la función $f: [0, 3] \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{x+1}$, es continua, comprobemos que existe un punto $c \in [0, 3]$ tal que

$$\int_0^3 \sqrt{x+1}\, dx = (3-0)\cdot\sqrt{c+1}$$

$$\int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^3 = \frac{2}{3}(3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

$$(3-0)\sqrt{c+1} = \frac{14}{3} \Rightarrow \sqrt{c+1} = \frac{14}{9}\ ;\ c+1 = \frac{14^2}{9^2} = \frac{196}{81}\ ;\ c = \frac{196}{81} - 1 = \frac{115}{81} \in [0,3]$$

11.14 Calcular $\qquad E = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_a^{a+1} \frac{\log x}{e^x}\, dx$

(Univ. de Santiago)

La función $f:\ R_+^* \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{\log x}{e^x}$ es continua. Según el teorema del valor medio del cálculo integral:

$$\int_a^{a+1} \frac{\log x}{e^x}\,dx = (a+1-a)\cdot\frac{\log(a+h)}{e^{a+h}},\ \text{ siendo } 0<h<1, \quad \text{de aquí:}\quad E = \lim_{a\to+\infty} \frac{\log(a+h)}{e^{a+h}},$$

que es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hopital:

$$E = \lim_{a\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{a+h}}{e^{a+h}} = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{(a+h)e^{a+h}} = \left(\frac{1}{(+\infty)e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty}\right) = \boxed{0}$$

11.15 Hallar el valor de la suma: $S = I_1 + 2I_2 + 3I_3 + \cdots + 100\,I_{100}$

siendo $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx\,dx$

(Univ. del País Vasco)

$$I_n = \left[\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\operatorname{sen} 0 = \frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

haciendo $n = 4h,\ n = 4h+1,\ n = 4h+2,\ n = 4h+3$:

$$I_{4h} = \frac{1}{4h}\operatorname{sen}\left(4h\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h}\operatorname{sen}(2h\pi) = \frac{1}{4h}\cdot 0 = 0$$

$$I_{4h+1} = \frac{1}{4h+1}\operatorname{sen}\left((4h+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h+1}\operatorname{sen}\left(2h\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h+1}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4h+1}\cdot 1 = \frac{1}{4h+1}$$

$$I_{4h+2} = \frac{1}{4h+2}\operatorname{sen}\left((4h+2)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h+2}\operatorname{sen}(2h\pi + \pi) = \frac{1}{4h+2}\operatorname{sen}\pi = \frac{1}{4h+2}\cdot 0 = 0$$

$$I_{4h+3} = \frac{1}{4h+3}\operatorname{sen}\left((4h+3)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h+3}\operatorname{sen}\left(2h\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{4h+3}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{4h+3}(-1) = \frac{-1}{4h+3}$$

de donde: $(4h+1)I_{4h+1} + (4h+2)I_{4h+2} + (4h+3)I_{4h+3} + (4h+4)I_{4h+4} =$

$$= (4h+1)\frac{1}{4h+1} + (4h+2)\cdot 0 + (4h+3)\frac{-1}{4h+3} + (4h+4)\cdot 0 = 1 + 0 - 1 + 0 = 0$$

$$S = (I_1 + 2I_2 + 3I_3 + 4I_4) + \cdots + (79\,I_{97} + 98\,I_{98} + 99\,I_{99} + 100\,I_{100}) =$$

$$= (1 + 0 - 1 + 0) + \cdots + (1 + 0 - 1 + 0) = \boxed{0}$$

11.16 Calcular el área encerrada por la curva

$$y = x^2 - 4x$$

y la recta

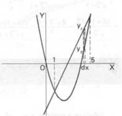
$$y = 2x - 5.$$

(Univ. de Málaga)

Representemos la parábola $y = x^2 - 4x$:

Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$;

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0$; $x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$



Máximos y mínimos:

$y' = 2x - 4$; $y' = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$, $x = 2$

$y'' = 2 > 0 \Rightarrow$ existe un mínimo en el punto $(2, -4)$

Corte de la parábola y la recta:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 4x \\ y &= 2x - 5 \end{aligned}\right| \Rightarrow x^2 - 4x = 2x - 5 \; ; \; x^2 - 6x + 5 = 0 \; ;$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \Rightarrow y = 5 \\ 1 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

El área del rectángulo tramado en la figura será:

$$dS = (y_{recta} - y_{curva})\, dx = \left((2x-5) - (x^2 - 4x)\right) dx = (-x^2 + 6x - 5)\, dx \Rightarrow$$

$$S = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 5x\right]_1^5 = \left(-\frac{125}{3} + 3 \cdot 25 - 25\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) = \boxed{\frac{32}{3}}$$

11.17 Determinar el área del recinto limitado por la parábola

$$y^2 = 2x$$

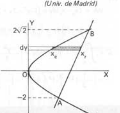
y la recta que une los puntos $A(2, -2)$ y $B(4, 2\sqrt{2})$.

(Univ. de Madrid)

El dibujo de la parábola $y^2 = 2x$ no ofrece dificultad. Pasa por el punto $(0, 0)$ y tiene en este punto un mínimo de la x, ya que $x' = y$, siendo $x'' = 1 > 0$.

Los puntos A y B están sobre la parábola, ya que sus coordenadas satisfacen la ecuación de la parábola.

La ecuación de la recta AB es:



$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-(-2)}{2\sqrt{2}-(-2)} \Rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2(\sqrt{2}+1)} \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}+1}\, y + \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

Area pedida: $dS = (x_r - x_c)\, dy \Rightarrow S = \int_{-2}^{2\sqrt{2}} (x_r - x_c)\, dy = \int_{-2}^{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\, y + \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2} y^2\right) dy$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}+1}\, \frac{y^2}{2} + \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\, y - \frac{1}{2}\, \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\, \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} + \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\, (2\sqrt{2}) - \frac{1}{6}\, (2\sqrt{2})^3\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\,\frac{(-2)^2}{2}+\frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}(-2)-\frac{1}{6}(-2)^3\right)=\frac{4+8\sqrt{2}+8}{\sqrt{2}+1}-\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{2-8-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-\frac{4}{3}=$$

$$=\frac{18+12\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-\frac{8\sqrt{2}+4}{3}=\frac{(18+12\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}-\frac{8\sqrt{2}+4}{3}=\frac{6\sqrt{2}+6}{2-1}-\frac{8\sqrt{2}+4}{3}=\boxed{\frac{10\sqrt{2}+14}{3}}$$

11.18 Hallar el área encerrada por

$$y^2+2y+x-3=0 \quad \text{e} \quad y=x+1$$

(Univ. de La Laguna)

Dibujo de la parábola $x=-y^2-2y+3=0$:

Corte con los ejes: $x=0 \Rightarrow y^2+2y-3=0 \Rightarrow y=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$;

$y=0 \Rightarrow x=3$

Máximos y mínimos (de la x): Derivando respecto de y:

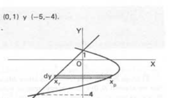
$x'=-2y-2,\; x'=0 \Rightarrow -2y-2=0 \Rightarrow y=-1;$
$x''=-2$
$\Rightarrow$ existe un máximo de la x en el punto $(4,-1)$.

Punto de corte de la recta y la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} y=x+1\\ y^2+2y+x-3=0\end{array}\right\} \Rightarrow (x+1)^2+2(x+1)+x-3=0 \Rightarrow x^2+5x=0 \Rightarrow x=0,\ x=-5.$$

La recta y la parábola se cortan en los puntos $(0,1)$ y $(-5,-4)$.

Area pedida: El área del rectángulo rayado es (considerando que x_r es negativa):



$$dA=(x_p-x_r)dy=\big((-y^2-2y+3)-$$
$$-(y-1)\big)dy=(-y^2-3y+4)dy \Rightarrow$$

$$A=\int_{-4}^{1}(-y^2-3y+4)dy=\left[-\frac{y^3}{3}-3\,\frac{y^2}{2}+4y\right]_{-4}^{1}=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\cdot1^3-\frac{3}{2}\cdot1^2+4\cdot1\right)-\left(-\frac{1}{3}(-4)^3-\frac{3}{2}(-4)^2+4(-4)\right)=\boxed{\frac{125}{6}}$$

11.19 Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x)=1+\frac{x}{3} \qquad ; \qquad g(x)=(x+1)^{\frac{1}{2}}$$

(Univ. de Barcelona)

Hallemos los puntos de intersección de ambas gráficas resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = 1+\dfrac{x}{3} \\ y = (x+1)^{\frac{1}{2}} \end{array}\right| \quad 1+\frac{x}{3} = (x+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)^2 = x+1 \ ; \ 1+\frac{x^2}{9}+\frac{2x}{3} = x+1 \ ;$$

$$9+x^2+6x = 9x+9 \ ; \ x^2-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 3$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad g''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} < 0 \quad \forall x \in [0,3] \Rightarrow$$

la función g es cóncava en el intervalo [0, 3].

$$\text{Area pedida} = \int_0^3 [g(x)-f(x)]\,dx = \int_0^3 \left((x+1)^{\frac{1}{2}}-1-\frac{x}{3}\right)dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - x - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - x - \frac{1}{6}x^2\right]_0^3 = \left(\frac{2}{3}(3+1)^{\frac{3}{2}} - 3 - \frac{1}{6}9\right) - \frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} - 0 - 0 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

11.20 Determinar el área encerrada entre las gráficas de las funciones de ecuaciones

$$y = 6x - x^2 \quad , \quad y = x^2 - 2x$$

(Univ. de Castilla – La Mancha)
(Univ. de La Laguna)
(Univ. de Extremadura)

Dibujo de la parábola $y = 6x - x^2$*:*

Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow 6x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 6$

Máximos y mínimos: $y' = 6-2x$; $y' = 0 \Rightarrow 6-2x = 0, \ x = 3$; $y'' = -2 < 0 \Rightarrow$ existe un máximo en el punto (3, 9).

Dibujo de la parábola $y = x^2 - 2x$*:*

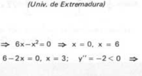
Corte con los ejes: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 2$

Máximo y mínimos: $y' = 2x-2$; $y' = 0 \Rightarrow 2x-2 = 0, \ x = 1$; $y'' = 2 > 0 \Rightarrow$ existe un mínimo en el punto (1, –1).

Puntos de corte de ambas curvas:

$$\left.\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right| \quad 6x - x^2 = x^2 - 2x$$

$$2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 4$$



las curvas se cortan en los puntos (0, 0) y (4, 8)

Cálculo del área pedida:

$$dA = (y_1 - y_2)\,dx = ((6x-x^2)-(x^2-2x))dx =$$

$$= (-2x^2+8x)dx \Rightarrow A = \int_0^4 (-2x^2+8x)dx = \left[-2\cdot\frac{x^3}{3}+8\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = -\frac{2}{3}\cdot 4^3+4\cdot 4^3-0 = \boxed{\frac{64}{3}}$$

11.21 Calcular el área de la figura plana situada en el primer cuadrante y limitada por las curvas:

$$x^2+y^2=4x\ ;\quad y^2=2x$$

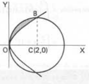
(Univ. del País Vasco)

La ecuación $x^2+y^2-4x=0$ es la de la circunferencia de centro el punto (2, 0) y radio 2.

El dibujo de la parábola $y^2=2x$ no ofrece dificultad.

Puntos de corte de ambas curvas:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=4x \\ y^2=2x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+2x=4x;\ x^2-2x=0\ ;\quad x=0,\ x=2$$



Cálculo del área pedida:

El área pedida es igual a la cuarta parte del área del círculo de radio 2 menos el área del triángulo mixtilíneo OCB determinado por las rectas $y=0$, $x=2$ y el arco de parábola OB:

$$\text{Area} = \frac{1}{4}\pi\cdot 2^2 - \int_0^2 y\,dx = \pi - \int_0^2 \sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx = \pi - \sqrt{2}\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2 = \pi - \sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 2^{1+\frac{1}{2}} - 0\right) =$$

$$= \pi - \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}2\cdot\sqrt{2} = \boxed{\pi - \frac{8}{3}}$$

11.22 Dada la curva $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

hallar b, (b > 3), tal que el área comprendida entre la curva, el eje OX y las ordenadas correspondientes a x = 3 y x = b sea $\log\sqrt[4]{(b+2)^3}$.

(Univ. de Valladolid)

$$y = \frac{x-1}{(x+2)(x-2)}\ ,\quad \forall x>3,\ x-1>0,\ x+2>0,\ x-2>0 \Rightarrow y>0$$

El área comprendida entre la curva, el eje OX y las rectas $x=3$ y $x=b$ es:

$$S = \int_3^b \frac{x-1}{x^2-4}\,dx$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2} \Rightarrow x-1 = A(x-2)+B(x+2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{para } x = 2: & 1 = 4B \\ \quad " \quad x = -2: & -3 = -4A\end{array}\right| \Rightarrow A = \frac{3}{4}; \quad B = \frac{1}{4}$$

$$S = \int_3^b \left(\frac{\frac{3}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2}\right)dx = \left[\frac{3}{4}\log(x+2) + \frac{1}{4}\log(x-2)\right]_3^b =$$

$$= \frac{3}{4}\log(b+2) + \frac{1}{4}\log(b-2) - \frac{3}{4}\log 5 - \frac{1}{4}\log 1 = \log(b+2)^{\frac{3}{4}} + \log(b-2)^{\frac{1}{4}} - \log 5^{\frac{3}{4}} =$$

$$= \log \frac{(b+2)^{\frac{3}{4}}(b-2)^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{3}{4}}}$$

Según el enunciado: $\log \dfrac{(b+2)^{\frac{3}{4}}(b-2)^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{3}{4}}} = \log(b+2)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \dfrac{(b+2)^{\frac{3}{4}}(b-2)^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{3}{4}}} = (b+2)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow$

(al ser $b+2 \neq 0$, ya que $b > 3$)

$$(b-2)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{4}} \Rightarrow (b-2)^{\frac{1}{4}} = (5^3)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow b-2 = 5^3 \Rightarrow \boxed{b = 127}$$

11.23 Calcular el área encerrada por la gráfica de $y = \dfrac{1}{4+x^2}$ el eje de abscisas y las rectas $x = 2\sqrt{3}$ y $x = 2$.

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

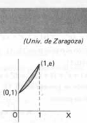
$\forall x \in \mathbf{R} \;\; 4+x^2 > 0 \Rightarrow$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ es continua y positiva:

$$\text{Area pedida} = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{2}{4}\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}\right]_2^{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg} 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{24}}$$

11.24 Hallar el área limitada por la curva $y = e^x$ y la cuerda de la curva que une los puntos de abscisas 0 y 1.

(Univ. de Zaragoza)



Para $x = 0$: $y = e^0 = 1$; para $x = 1$: $y = e$.

$y' = e^x$; $y'' = e^x > 0 \Rightarrow$ la función es convexa.

La cuerda que une los puntos $(0, 1)$ y $(1, e)$ está por encima de la curva.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(1, e)$ es:

$$\frac{y-1}{e-1} = \frac{x-0}{1-0} \Rightarrow y = (e-1)x + 1$$

El área pedida será:

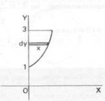
$$A = \int_0^1 (y_r - y_c)\,dx = \int_0^1 \left((e-1)x + 1 - e^x\right)dx = \left[(e-1)\frac{x^2}{2} + x - e^x\right]_0^1 =$$

$$= \left((e-1)\frac{1^2}{2} + 1 - e^1\right) - \left((e-1)\frac{0}{2} + 0 - e^0\right) = \frac{e-1}{2} + 1 - e + 1 = \boxed{2 - \frac{e+1}{2}}$$

11.25 Hallar el área de la región limitada por el eje de ordenadas, la recta $y = 3$, y la curva $y = e^x$.

(Univ. de Valladolid, 1991)

$y' = e^x$; $y'' = e^x > 0 \Rightarrow$ la función es convexa.



Para $x = 0$: $y = e^0 = 1$

Area pedida:

$$\left.\begin{array}{l} dS = x\,dy \\ y = e^x \Rightarrow x = \log y \end{array}\right| \Rightarrow dS = \log y \cdot dy$$

$$S = \int_1^3 \log y \cdot dy$$

Integrando por partes:

$$\begin{array}{l|l} u = \log y & du = \frac{1}{y}\,dy \\ dv = dy & v = y \end{array} \Rightarrow S = \Big[(\log y)\,y\Big]_1^3 - \int_1^3 y \cdot \frac{1}{y}\,dy = \left(3\log 3 - 1 \cdot \log 1\right) - \Big[\,y\,\Big]_1^3 =$$

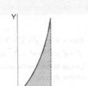
$$= 3\log 3 - (3-1) = \boxed{3\log 3 - 2}$$

11.26 Hallar el área encerrada por las líneas cuyas ecuaciones son:
$y = xe^x$; $y = 0$; $x = 1$

(Univ. de las Palmas de Gran Canaria)

$f(x) = xe^x$; $f'(x) = 1 \cdot e^x + xe^x = (1+x)e^x \geqslant 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

la función es creciente en $[0, 1]$ y como $f(0) = 0$: $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [0, 1]$.



$f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x > 0 \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow$

la función es convexa en $[0, 1]$.

Area pedida:

$$A = \int_0^1 x e^x\,dx$$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^x \end{array}\right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = e^x \end{array} \Rightarrow A = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = \boxed{1}$$

11.27 Hallar el área limitada por la curva $y = x \cdot e^{-x^2}$ el eje de abscisas y la recta $x = a$, siendo a la abscisa del máximo de la curva.

(Univ. de Alicante)

Hallemos la abscisa del máximo: $f(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) =$

$= (1-2x^2)e^{-x^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0$; $x^2 = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(x) = -4x \cdot e^{-x^2} + (1-2x^2)e^{-x^2}(-2x) = 2x(2x^2-3)e^{-x^2}$

$f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\,\frac{1}{2} - 3\right)e^{-\frac{1}{2}} < 0 \Rightarrow$ la función tiene un máximo para $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 2\,\frac{-1}{\sqrt{2}}\left(2\frac{-1}{2} - 3\right)e^{-\frac{1}{2}} > 0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo para $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

En el intervalo $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $f'(x) > 0$, la función es creciente, y como $f(0) = 0$, la función es positiva en dicho intervalo.

El área pedida es: $A = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$

$$= -\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-0}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)}$$

11.28 Hallar el área encerrada por la curva $y = \log x$ el eje OX y la recta $x = e$.

(Univ. de Extremadura)

$y = 0 \Rightarrow \log x = 0 \Rightarrow x = 1$

$f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ para todo $x \in [1, e] \Rightarrow$ la curva es creciente en el intervalo $[1, e]$, y como $f(1) = 0$, la función es positiva en el intervalo $]1, e]$. También es continua en dicho intervalo.

Area pedida: $A = \int_1^e \log x\,dx$ $\qquad \left.\begin{array}{l} u = \log x \\ dv = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{array} \Rightarrow$

$$A = \left[x\log x\right]_1^e - \int_1^e x\,\frac{1}{x}\,dx = e\log e - 1 \cdot \log 1 - \left[x\right]_1^e = e - (e-1) = \boxed{1}$$

11.29 **Hallar el área comprendida entre la curva:** $y = \log(x+5)$
y las rectas: $y = 0 \ ; \ x = -\frac{9}{2} \ ; \ x = 1$

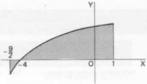
(Univ. de Córdoba)

$y = 0 \Rightarrow \log(x+5) = 0, \ x+5 = 1, \ x = -4$

$f(-\frac{9}{2}) = \log(-\frac{9}{2}+5) = \log 0'5 \ ; \ f(1) = \log 6$

$f'(x) = \frac{1}{x+5} > 0$ para todo $x \in \left[-\frac{9}{2}, 1\right]$

$f''(x) = \frac{-1}{(x+5)^2} < 0 \Rightarrow$ la curva es cóncava



Area pedida: $A = -\int_{-\frac{9}{2}}^{-4} \log(x+5)\,dx + \int_{-4}^{1} \log(x+5)\,dx$

Calculemos, por el método de integración por partes, $I = \int \log(x+5)\,dx$

$u = \log(x+5) \ \Big| \ du = \frac{dx}{x+5}$
$dv = dx \ \Big| \ v = x$

$\Rightarrow I = x \cdot \log(x+5) - \int \frac{x}{x+5}\,dx = x \cdot \log(x+5) - \int \frac{(x+5)-5}{x+5}\,dx =$

$= x \cdot \log(x+5) - \int (1 - \frac{5}{x+5})\,dx = x \cdot \log(x+5) - x + 5\log(x+5) = (x+5)\log(x+5) - x$

de donde $A = -\Big[(x+5)\log(x+5) - x\Big]_{-\frac{9}{2}}^{-4} + \Big[(x+5)\log(x+5) - x\Big]_{-4}^{1} =$

$= -\big((1 \cdot \log 1 + 4) - (0'5 \log 0'5 + 4'5)\big) + (6\log 6 - 1) - (1 \cdot \log 1 + 4) =$

$= \boxed{-4'5 + 0'5 \log 0'5 + 6 \log 6}$

11.30 **Hallar el área limitada por las curvas** $y = \log x \ ; \ y = 2$
y los ejes de coordenadas.

(Univ. de León)

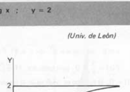
$y = 0 \Rightarrow \log x = 0, \ x = 1$

$y' = \frac{1}{x} > 0$ para $x > 0 \Rightarrow$ la curva es creciente

$y'' = \frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ la curva es cóncava

La parte del plano cuya área nos piden es aproximadamente la de la figura.

Cálculo del área pedida:



$$\left.\begin{aligned} dA &= x\cdot dy \\ y &= \log x \Rightarrow x = e^y \end{aligned}\right| \Rightarrow dA = e^y dy \Rightarrow A = \int_0^2 e^y dy = \left[e^y\right]_0^2 = e^2 - e^0 = \boxed{e^2 - 1}$$

11.31 Calcular el área de la zona del plano limitada por las rectas

$$y = 0\ ; \quad x = 1\ ; \quad x = e$$

y la gráfica $\qquad y = (\log x)^2$

(Univ. de Barcelona)

La función definida por $f(x) = (\log x)^2$ es continua para $x > 0$.

$f(1) = (\log 1)^2 = 0\ ;\ f(e) = (\log e)^2 = 1$

$f'(x) = 2(\log x)\cdot\frac{1}{x} \geqslant 0$ para todo $x \in [1, e] \Rightarrow$ la función es creciente en el intervalo $]1, e]$, y como $f(1) = 0$, la función es positiva en dicho intervalo.

Area pedida: $\qquad S = \int_1^e (\log x)^2\, dx$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{aligned} u &= (\log x)^2 \\ dv &= dx \end{aligned}\right| \begin{aligned} du &= 2(\log x)\,\frac{1}{x}\,dx \\ v &= x \end{aligned} \Rightarrow S = \left[(\log x)^2 x\right]_1^e - \int_1^e x\cdot 2(\log x)\,\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= (\log e)^2 e - (\log 1)^2\cdot 1 - 2\int_1^e \log x\,dx = e - 2\int_1^e \log x\,dx$$

integrando de nuevo por partes:

$$\left.\begin{aligned} u &= \log x \\ dv &= dx \end{aligned}\right| \begin{aligned} du &= \frac{1}{x}\,dx \\ v &= x \end{aligned} \Rightarrow S = e - 2\left(\left[(\log x)x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\,x\,dx\right) =$$

$$= e - 2\left((\log e)\,e - (\log 1)\cdot 1 - \int_1^e dx\right) = e - 2e + 2\left[x\right]_1^e = -e + 2(e-1) = \boxed{e-2}$$

11.32 Hallar el área limitada por la gráfica de $\quad y = -\log x^2$

y las rectas: $\qquad x = e \quad y \quad x = e^2$

(Univ. de Córdoba)

La función definida por $f(x) = -\log x^2$ es continua en el intervalo $[e, e^2]$.

$f'(x) = -\frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x} < 0$ para todo $x \in [e, e^2] \Rightarrow$ la función es decreciente en este intervalo, y como $f(e) = -\log e^2 = -2\log e = -2$, la función es negativa en dicho intervalo.

Area pedida: $\qquad A = -\int_e^{e^2} (-\log x^2)\,dx$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = -\log x^2 \\ dv = dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = -\dfrac{2}{x}\,dx \\ v = x \end{array} \Rightarrow A = \Big[x \log x^2\Big]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{2}{x}\cdot x\,dx = e^2 \log e^4 - e \log e^2 - \Big[2x\Big]_e^{e^2} =$$

$$= 4e^2 - 2e - (2e^2 - 2e) = \boxed{2e^2}$$

11.33 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x \cdot \log x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función y el eje OX, desde $x = 0$ hasta $x = b$, siendo b la abscisa del mínimo de la función.

(Univ. de León)
(Univ. de Madrid)

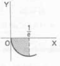
$$f(x) = x \cdot \log x \Rightarrow f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1\,;\ f'(x) = 0 \Rightarrow \log x + 1 = 0\,;$$

$$\log x = -1\,;\ x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0 \Rightarrow \text{la función presenta un mínimo en el punto } \left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right).$$

Veamos la posición de la curva en un entorno de 0:

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{(L'Hopital)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$



En el intervalo $[0, e^{-1}]$, $f(x) \leqslant 0$, de donde: $A = -\displaystyle\int_0^{e^{-1}} x \cdot \log x\,dx$

Integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = \log x \\ dv = x\,dx \end{array}\right| \begin{array}{l} du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \Rightarrow A = -\left(\left[(\log x)\,\frac{x^2}{2}\right]_0^{e^{-1}} - \int_0^{e^{-1}} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) =$$

$$= -(\log e^{-1})\,\frac{e^{-2}}{2} + \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{2}\log x\right) + \int_0^{e^{-1}} \frac{1}{2}x\,dx = 1\cdot\frac{e^{-2}}{2} + \lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to 0}(x \log x) + \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{e^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2} + 0\cdot 0 + \frac{e^{-2}}{4} = \boxed{\frac{3}{4}e^{-2}}$$

11.34 Determinar el área acotada por $f(x) = x^2 \cdot \log x$ **su tangente en el punto de abscisa $x = e$ y el eje OX.**

(Univ. de Madrid)

La función definida por $f(x) = x^2 \log x$ es continua para $x > 0$.

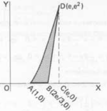
Corte de la curva con el eje OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 \cdot \log x = 0 \begin{cases} x^2 = 0\,, & x = 0 \\ \log x = 0\,, & x = 1 \end{cases}$

$f'(x) = 2x \cdot \log x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x\,(2 \log x + 1)\;;\; f''(x) = 2 \log x + 1 + x\,\dfrac{2}{x} = 2 \log x + 3 > 0$ en el intervalo $[1, e] \Rightarrow$ la función es convexa, la curva queda por encima de la tangente.

$f(e) = e^2 \cdot \log e = e^2$

Ecuación de la tangente en el punto (e, e^2):

$f'(x) = x\,(2 \log x + 1)$; $f'(e) = e(2 \log e + 1) = 3e \Rightarrow$ la ecuación de la tangente en el punto (e, e^2) es: $\quad y - e^2 = 3e\,(x - e)$.



Area pedida: Es igual al área del triángulo mixtilíneo ADC menos el área del triángulo BDC.

Area del triángulo mixtilíneo ADC:

$$S = \int_1^e y\,dx = \int_1^e x^2 \log x\;dx$$

integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l|l} u = \log x & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx & v = \dfrac{1}{3}x^3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$S = \left[\frac{1}{3}x^3 \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^3\,\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}e^3 \log e - \frac{1}{3}1^3 \log 1 - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e =$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1) = \frac{1}{9}(2e^3 + 1)$$

La tangente $y = 3e\,x - 2e^2$ corta al eje OX en el punto $\left(\dfrac{2}{3}e, 0\right)$.

Area del triángulo BCD $= \dfrac{1}{2}\,\overline{BC} \cdot \overline{CD} = \dfrac{1}{2}\left(e - \dfrac{2}{3}e\right)e^2 = \dfrac{1}{6}e^3$

Area pedida $= \dfrac{1}{9}(2e^3 + 1) - \dfrac{1}{6}e^3 = \boxed{\dfrac{1}{18}(e^3 + 2)}$

11.35 **Dada la función $f: R_+^* \to R$ definida por $\quad f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ hallar el área determinada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y la recta $x = e$.**

(Univ. de Islas Baleares)
(Univ. de Santiago)

$y = 0 \Rightarrow \dfrac{\log x}{x} = 0\;;\quad \log x = 0\;;\quad x = 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} > 0 \text{ para todo } x \in [1, e[\; \Rightarrow$$

la función es creciente en este intervalo, y como $f(1) = 0$, la función es positiva en $]1, e[$. De donde:

Area pedida: $A = \int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx = \int_1^e (\log x)^1 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\log e)^2}{2} - \frac{(\log 1)^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

11.36 Sean $f(x) = -x^2 - 4x$; $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$.

Calcular el área del dominio, conjunto de puntos $M(x, y)$ tales que $-2 \leqslant x \leqslant 0$; $g(x) \leqslant y \leqslant f(x)$.

(Univ. de Córdoba)

Representemos ambas curvas en el intervalo $[-2, 0]$.

$f(x) = -x^2 - 4x$: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $x = -2 \Rightarrow y = 4$

$f'(x) = -2x - 4$; $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 4 = 0$; $x = -2$; $\forall x \in [-2, 0]$, $f'(x) \leqslant 0 \Rightarrow$

la curva es decreciente.

$f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ la curva es cóncava.

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 = 2^{-x} - 2$: $x = 0 \Rightarrow y = 1 - 2 = -1$; $x = -2 \Rightarrow y = 2^2 - 2 = 2$

$g'(x) = 2^{-x}(\log 2)(-1) = -2^{-x} \cdot \log 2 < 0 \quad \forall x \in [-2; 0] \Rightarrow$ la curva es decreciente.

$g''(x) = -2^{-x}(\log 2)^2(-1) = 2^{-x}(\log 2)^2 > 0 \Rightarrow$ la curva es convexa.

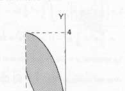
Con los datos obtenidos podemos dibujar ambas curvas en el intervalo $[-2, 0]$, comprobando que no se cortan en dicho intervalo.

El área pedida será:

$$S = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx = \int_{-2}^{0} (-x^2 - 4x - 2^{-x} + 2)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - \frac{2^{-x}}{\log 2}(-1) + 2x\right]_{-2}^{0} =$$

$$= \frac{1}{\log 2} - \left(-\frac{-8}{3} - 4 \cdot 2 + \frac{2^2}{\log 2} - 4\right) = \boxed{\frac{-3}{\log 2} + \frac{28}{3}}$$



11.37 **Calcular el área del plano comprendida entre la curva**

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$$

y la recta $y = 1$.

(Univ. de Barcelona)

Hallemos los puntos de corte de la curva y la recta:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2+1}{x^4+1} \\ y = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^4+1} = 1 \Rightarrow x^2+1 = x^4+1\ ,\quad x^4 - x^2 = 0\ ,\quad x^2(x^2-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 = 0\ ,\quad x = 0 \\ x^2 - 1 = 0\ ,\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Para $-1 \leqslant x \leqslant 1$: $x^2 \leqslant 1$ y $x^4 \leqslant x^2 \Rightarrow y = \dfrac{x^2+1}{x^4+1} \geqslant \dfrac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \Rightarrow$

la ordenada de la curva es igual o mayor que la ordenada de la recta. Como además, la curva es simétrica respecto del eje OY, ya que $f(-x) = f(x)$:

Area pedida: $\quad S = 2\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{x^4+1} - 1\right) dx = 2\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx - 2$

La descomposición en fracciones simples de esta función racional es muy complicada. Calcularemos la integral haciendo el siguiente cambio de variable:

$t = x - \dfrac{1}{x} \Rightarrow$ para $x \to 0^+$, $t \to -\infty$; para $x = 1$, $t = 0$; $dt = \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) dx$;

$t^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2$; $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 + 2$. Dividiendo numerador y denominador por x^2:

$$S = 2\int_0^1 \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx - 2 = 2\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{2 + t^2} - 2 = 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} dt - 2 =$$

$$= \sqrt{2}\left[\text{arc tg } \frac{t}{\sqrt{2}}\right]_{-\infty}^0 - 2 = \sqrt{2}\left(\text{arc tg } 0 - \text{arc tg } (-\infty)\right) - 2 = \boxed{\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 2}.$$

11.38 Calcular el área del recinto comprendido entre la parábola

$$y = \frac{x^2}{4}$$

y la recta $\qquad y = x.$

Calcular asimismo el volumen generado por dicho recinto al girar 360° alrededor del eje OX.

(Univ. de Valencia)

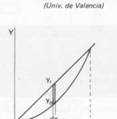
Puntos de corte de la parábola y la recta:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = x \end{array}\right| \quad x = \frac{x^2}{4}\ ;\ x^2 - 4x = 0\ ;\ x_1 = 0,\ x_2 = 4$$

$$f(0) = 0\ ;\ f(4) = 4$$

$$S = \int_0^4 (y_{\text{recta}} - y_{\text{parábola}})\, dx = \int^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{4\cdot 3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$



Cálculo del volumen: $dV = \pi y_r^2\,dx - \pi y_p^2\,dx = \pi\left(y_r^2 - y_p^2\right)dx = \pi\left(x^2 - \frac{x^4}{16}\right)dx \Rightarrow$

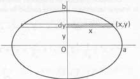
$$V = \int_0^4 \pi\left(x^2 - \frac{1}{16}x^4\right)dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{16}\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \pi\left(\frac{4^3}{3} - \frac{1}{16}\frac{4^5}{5}\right) = \boxed{\frac{128}{5}\pi}$$

11.39 De la familia de elipses de ecuaciones: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

cuyos semiejes a y b cumplen la condición de que $a^2 + b^2 = 1$, determinar aquella que, al girar alrededor del eje OY, engendra un sólido de revolución de volumen máximo.

(Univ. de Navarra)

Hallemos el volumen del sólido de revolución. El volumen engendrado por el rectángulo de la fira al girar alrededor del eje OY es:



$$dV = \pi x^2 dy = \pi a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy \Rightarrow$$

$$V = 2\int_0^b \pi a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2\pi a^2\left[y - \frac{y^3}{3b^2}\right]_0^b =$$

$$= 2\pi a^2\left(b - \frac{b^3}{3b^2}\right) = 2\pi a^2 \cdot \frac{2}{3}b = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

y como $a^2 + b^2 = 1$: $\quad V = \frac{4}{3}\pi(1 - b^2)b = \frac{4}{3}\pi(b - b^3)$

$$\frac{dV}{db} = \frac{4}{3}\pi(1 - 3b^2)\ ; \quad \frac{dV}{db} = 0 \Rightarrow 1 - 3b^2 = 0\ ; \quad b^2 = \frac{1}{3}\ ; \quad a^2 = 1 - b^2 = \frac{2}{3}$$

y al ser $\frac{d^2V}{db^2} = \frac{4}{3}\pi(-6b) < 0$, tenemos un máximo.

Elipse pedida: $\boxed{\dfrac{x^2}{\frac{2}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1}$

11.40 La región situada en el primer cuadrante y limitada por las líneas

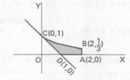
$$y = \frac{1}{x+1}$$

la recta tangente a la curva anterior en el punto de abscisa $x = 0$, la recta $x = 2$ y el eje OX, gira alrededor de éste último. Hallar el volumen del cuerpo de revolución que se genera. Hacer la representación gráfica.

(Univ. del País Vasco)

$y' = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$; $f'(0) = \dfrac{-1}{1} = -1 \Rightarrow$ la ecuación

de la tangente a la curva en el punto $(0, 1)$ es:



$$y - 1 = -1(x-0), \quad y = -x+1$$

esta recta corta a los ejes en los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$.

$y' = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$, $\Rightarrow$ la curva es decreciente en todos sus puntos.

Para $x = 2$, $y = \dfrac{1}{3}$.

El volumen pedido, generado por la parte tramada al girar 360° alrededor del eje OX, es igual al volumen generado al girar el cuadrilátero mixtilíneo OABC, menos el volumen del cono generando al girar el triángulo ODC:

$$V = \int_0^2 \pi y^2\,dx - \frac{1}{3}\pi\,\overline{OC}^2 \cdot \overline{OD} = \int_0^2 \pi \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \frac{1}{3}\pi\,1^2 \cdot 1 = \pi \int_0^2 (x+1)^{-2}\,dx - \frac{1}{3}\pi =$$

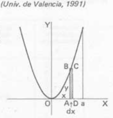
$$= \pi\left[\frac{(x+1)^{-1}}{-1}\right]_0^2 - \frac{1}{3}\pi = \pi\left(\frac{3^{-1}}{-1} - \frac{(1)^1}{-1}\right) - \frac{1}{3}\pi = \pi\left(\frac{-1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

11.41 Si $a \in]0, 1[$, la ecuación $f_a(x) = \dfrac{1-a}{a^2}x^2$ representa a una parábola que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(a, 1-a)$. Se pide:

1) Calcular el área $S(a)$ de la región limitada por la gráfica de la parábola, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = a$. ¿Para qué valor de a el área $S(a)$ es máxima?
2) Calcula el volumen $V(a)$ generado al girar 360° alrededor del eje OX, la región limitada por la gráfica de la parábola, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = a$. ¿Para qué valor de a el volumen $V(a)$ es máximo?

(Univ. de Valencia, 1991)

1) $S(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1-a}{a^2}x^2\,dx = \frac{1-a}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{3}(1-a)a = \boxed{\frac{1}{3}(a-a^2)}$



$S'(a) = \dfrac{1}{3}(1-2a)$, $S'(a) = 0 \Rightarrow 1 - 2a = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$

$S''(a) = \dfrac{-2}{3} < 0$, para $\boxed{a = \frac{1}{2}}$ el área $S(a)$ es máxima.

2) El volumen engendrado por el rectángulo ABCD al girar 360° alrededor del eje OX es:

$$dV(a) = \pi y^2\,dx \Rightarrow V(a) = \int_0^a \pi \frac{(1-a)^2}{a^4}x^4\,dx = \pi\frac{(1-a)^2}{a^4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \boxed{\frac{\pi(1-a)^2 a}{5}}$$

$$V'(a) = \frac{\pi}{5}\left(2(1-a)(-1)a + (1-a)^2 \cdot 1\right) = \frac{\pi}{5}(1-a)(1-3a)$$

$$V'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \ , & \text{no sirve porque } \ 1 \notin \left]0\,;1\right[\\ a = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$V''(a) = \frac{\pi}{5}\left(-1(1-3a) + (1-a)(-3)\right) = \frac{\pi}{5}(-4+6a) \ , \quad V''\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{5}\left(-4+\frac{6}{2}\right) < 0 \ \Rightarrow$$

para $\boxed{a = \frac{1}{3}}$ el volumen $V(a)$ es máximo.

CAPITULO 12

ESTADISTICA DESCRIPTIVA

ESTADISTICA DESCRIPTIVA.

La estadística descriptiva trata de la recogida, ordenación y simplificación de datos. Describe y analiza uno o varios caracteres de una población o una muestra de la población.

Población es todo conjunto del que se hace un estudio estadístico, analizando uno o varios caracteres de sus elementos.

Estos caracteres pueden ser cuantitativos o cualitativos.

- son cuantitativos si sus modalidades son mediables o numerables (temperatura de un enfermo, altura de una persona,. . .)
- son cualitativos si sus modalidades no son medibles (color de una flor, profesión de una persona, . . .)

Muestra es todo subconjunto de la población.

Al número de elementos de la muestra se llama *tamaño* de la muestra.

TABLAS DE DISTRIBUCION DE FRECUENCIAS.

I) Datos sin agrupar:

El examen de los elementos de una muestra, o toma de datos, da lugar a una serie de valores de la variable x escritos en el orden en que se van obteniendo. Seguidamente, si el tamaño de la muestra no es grande, se colocan por orden de magnitud creciente en forma de *tabla de distribución de frecuencias:*

Valores de la variable x_i	*Frecuencias absolutas* n_i	*Frecuencias relativas* f_i	*Frecuencias absolutas acumuladas* N_i	*Frecuencias relaticas acumuladas* F_i
x_1	n_1	$f_1 = \frac{n_1}{N}$	$N_1 = n_1$	$F_1 = \frac{N_1}{N}$
x_2	n_2	$f_2 = \frac{n_2}{N}$	$N_2 = n_1 + n_2$	$F_2 = \frac{N_2}{N}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k	$f_k = \frac{n_k}{N}$	$N_k = N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$	$F_k = \frac{N}{N} = 1$

– en la primera columna se escriben los distintos valores de la variable, ordenados de menor a mayor.

– en la segunda columna se escribe, frente a cada valor de la variable x_i, la frecuencia absoluta n_i, número de veces que se repite dicho valor.

– en la tercera columna se escribe, frente a cada valor de la variable x_i su frecuencia relativa, $f_i = n_i/N$, siendo N el tamaño de la muestra.

– en la cuarta columna se escriben las frecuencias absolutas acumuladas: $N_1 = n_1$, $N_2 = n_1 + n_2$, ..., $N_k = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N$.

– en la quinta columna se escriben las frecuencias relativas acumuladas: $F_1 = N_1/N$, $F_2 = N_2/N$, ...

Una tabla de distribución de frecuencias queda determinada con las dos primeras columnas. Las restantes columnas sólo se escribirán si son necesarias para el estudio que ha de realizarse.

II) Datos agrupados:

Si el tamaño N de la muestra es grande, suelen agruparse los datos en *casillas o intervalos de clase*, sustituyendo cada valor de la variable por la semisuma de los extremos del intervalo a que pertenece. Esta semisuma se llama *marca de clase*.

Extremos de los intervalos	*Marcas de clase*	*Frecuencias absolutas*
$e_i - e_{i+1}$	x_i	n_i
$e_1 - e_2$	$x_1 = \dfrac{e_1 + e_2}{2}$	n_1
$e_2 - e_3$	$x_2 = \dfrac{e_2 + e_3}{2}$	n_2
⋮	⋮	⋮
$e_k - e_{k+1}$	$x_k = \dfrac{e_k + e_{k+1}}{2}$	n_k

– en la primera columna se escriben los extremos de los intervalos de clase.

– en la segunda columna las marcas de clase, $x_i = \dfrac{e_i + e_{i+1}}{2}$

– en la tercera columna las frecuencias absolutas de cada intervalo de clase.

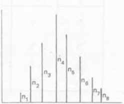
A partir de estas columnas se pueden escribir, si hacen falta para el estudio a realizar, las columnas correspondientes a las frecuencias relativas y frecuencias acumuladas.

REPRESENTACIONES GRAFICAS.

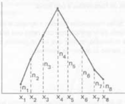
I) Datos sin agrupar:

Diagrama de barras: En el eje de abscisas, de unos ejes coordenados rectangulares, se señalan los valores de la variable, construyendo sobre éstos unos segmentos verticales de longitud igual (o proporcional) a cada una de las frecuencias.

Según que las frecuencias que se consideren sean las absolutas o las relativas, se obtendrá el diagrama de barras de frecuencias absolutas o relativas.



Polígono de frecuencias: Se obtiene uniendo mediante segmentos los puntos (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k), si se trata del polígono de frecuencias absolutas, o los puntos (x_1, f_1), (x_2, f_2), ..., (x_k, f_k) si se trata del polígono de frecuencias relativas.

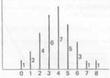


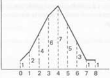
La siguiente tabla expresa la distribución de los hijos de 30 familias, elegidas al azar, en una ciudad:

nº de hijos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
nº de familias	1	2	4	6	7	5	3	1	1

Podemos expresar gráficamente esta distribución por el diagrama de barras y el polígono de frecuencias.

x_i	n_i
0	1
1	2
2	4
3	6
4	7
5	5
6	3
7	1
8	1



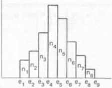


II) Datos agrupados:

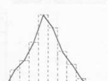
Histogramas: Se marcan en el eje de abscisas los extremos de los intervalos de clase, y sobre cada intervalo se construye un rectángulo cuya base coincide con el intervalo y la altura es igual (o proporcional) a la frecuencia de dicho intervalo.

Si la amplitud a_i de los intervalos de clase no fuera el mismo en todas, la atura de cada clase será:

$$h_i = \frac{n_i}{a_i}$$

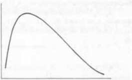


Polígono de frecuencias: Se obtiene al unir por segmentos los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos del histograma. (Se suele prolongar la linea poligonal hasta las marcas de clase inferior y superior inmediatas a las que figuran en el histograma).

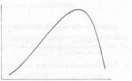


Cuanto menor sea la amplitud de los intervalos y mayor el número de éstos, más se acercará el polígono de frecuencias a una curva.

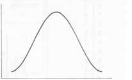
Si las frecuencias tienden a agruparse en la parte izquierda de la gráfica, con una rama que se extiende hacia la derecha, se dice que la distribución es asimétrica, siendo la asimetría positiva.



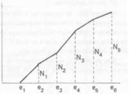
Si las frecuencias tienden a agruparse en la parte derecha de la gráfica, con una rama que se extiende hacia la izquierda, se dice que la distribución es asimétrica negativa.



La distribución es simétrica si las frecuencias se distribuyen simétricamente alrededor de un valor central.



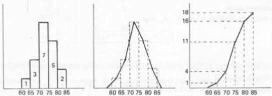
Polígono acumulativo. Se llama así a la línea poligonal que tiene por extremos los puntos de coordenadas $(e_1, 0)$, (e_2, N_1), (e_3, N_2), ... (e_{k+1}, N_k)



Dada la distribución de frecuencias:

extremos de los intervalos	frecuencias
60 – 65	1
65 – 70	3
70 – 75	7
75 – 80	5
80 – 85	2

el histograma, el polígono de frecuencias y el polígono acumulativo son los correspondientes a las figuras adjuntas (en el polígono acumulativo se ha considerado distinta escala en el eje de ordenadas)



Pictogramas: Los datos se representan gráficamente sustituyendo las barras del diagrama de barras o los rectángulos del histograma por figuras alusivas al caracter estudiado. (La producción de trigo en distintos años se puede representar por sacos de trigo o espigas, la producción de coches por el dibujo de coches, ...)

Cartogramas. Es la forma de representar sobre el mapa de la región estudiada los caracteres correspondientes, bien empleando distintos colores, tramas de distinta intensidad, o con una numeración adecuada.

Diagrama de sectores, de amplitudes proporcionales a las frecuencias.

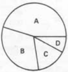
En las elecciones de cierto país han sido elegidos 200 candidatos de los partidos A, B, C y D con el siguiente resultado:

partidos	candidatos
A	90
B	65
C	30
D	15

La representación, mediante el diagrama de sectores se hace así:

$$\left.\begin{array}{l} 200 \text{ candidatos} — 360° \\ 90 \quad " \quad\quad a \end{array}\right\} \quad a = \frac{360 \cdot 90}{200} = 162° \qquad \left.\begin{array}{l} 200 — 360° \\ 65 — b \end{array}\right\} \quad b = \frac{360 \cdot 65}{200} = 117°$$

$$\left.\begin{array}{l} 200 — 360° \\ 30 — c \end{array}\right\} \quad c = 54°; \qquad d = 360 - 162 - 117 - 54 = 27°$$



MEDIDAS DE CENTRALIZACION O DE POSICION.

Son valores alrededor de los cuales se agrupan los valores de la variable. Se toman a veces como representantes de la distribución.

Media aritmética.

La media aritmética de $x_1, x_2, \ldots, x_N$ es:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}}$$

En un curso de Cou hay 8 chicos y 6 chicas. La nota de final de curso han sido, de los chicos 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, y de las chicas: 3, 4, 5, 6, 7, 8.

La nota media de los chicos es: $\bar{x} = \frac{2+3+4+5+6+6+7+7}{8} = \frac{40}{8} = 5$

La nota media de las chicas es: $\bar{x}' = \frac{3+4+5+6+7+8}{6} = \frac{33}{6} = 5'5$

La nota media del curso es: $\bar{x}'' = \frac{2+3+4+5+6+6+7+7+3+4+5+6+7+8}{14} = \frac{73}{14} = 5'2$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ se presentan con las frecuencias $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}}$$

La siguiente tabla expresa la distribución de los hijos de 30 familias elegidas al azar en una ciudad:

número de hijos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
número de familias	1	1	4	6	7	5	3	2	1

Para hallar la media de hijos por familia, operaremos del siguiente modo:

x_i	n_i	$n_i x_i$
0	1	0
1	1	1
2	4	8
3	6	18
4	7	28
5	5	25
6	3	18
7	2	14
8	1	8
	30	120

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{120}{30} = 4$$

Si los valores de la variable estadística son grandes, se simplifican los cálculos haciendo $x_i = A + d_i$ $\Leftrightarrow$ $d_i = x_i - A$, siendo A una constante que se puede elegir arbitrariamente:

$$\boxed{\bar{x} = A + \frac{n_1 d_1 + n_2 d_2 + \cdots + n_k d_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}}$$

x_i	n_i	$d_i = x_i - 400$	$n_i d_i$
382	3	− 18	− 54
395	7	− 5	− 35
$\boxed{400}$	12	0	0
408	9	8	72
413	2	13	26
	33		9

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = 400 + \frac{9}{33} = 400{,}27$$

Para datos agrupados en que todos los intervalos de clase tienen igual amplitud a, se simplifican los cálculos haciendo: $u_i = \dfrac{x_i - A}{a}$, siendo A una constante que se puede elegir arbitrariamente:

$$\boxed{\bar{x} = A + \frac{n_1 u_1 + n_2 u_2 + \cdots + n_k u_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} \cdot a}$$

intervalos	marcas de clase x_i	n_i	$x_i - 290$	$u_i = \dfrac{x_i - 290}{10}$	$n_i u_i$
265 − 275	270	2	− 20	− 2	− 4
275 − 285	280	8	− 10	− 1	− 8
285 − 295	$\boxed{290}$	13	0	0	0
395 − 305	300	10	10	1	10
305 − 315	310	7	20	2	14
		40			12

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = 290 + \frac{12}{40} \cdot 10 = 293$$

Si n_1 datos tienen de media $\bar{x}_1, n_2$ datos tienen de media $\bar{x}_2, \ldots, n_k$ datos tienen de media $\bar{x}_k$, la media de todos los datos es:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \cdots + n_k \bar{x}_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}}$$

En cuatro institutos se ha calculado el peso medio de los estudiantes de COU. En el instituto A que tiene 120 alumnos de COU, el peso medio es 62,4 kg. ; en el B, con 140 alumnos, el peso medio es 59,5 kg ; en el C, con 90 alumnos el peso medio es 64,2 kg. ; y en el D, con 130 alumnos, el peso medio es 56 Kg.

Para calcular el peso medio de los estudiantes de COU de los cuatro institutos se procede así:

x_i	n_i	$n_i x_i$
62,4	120	7488
59,5	140	8330
64,2	90	5778
56	130	7280
	480	28876

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{28876}{480} = 60{,}2$$

Media aritmética ponderada. Si $x_2, x_2, \ldots, x_N$ están afectados de los coeficientes o pesos p_1, $p_2, \ldots, p_N$, que indican la distinta importancia de $x_1, x_2, \ldots, x_N$:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_N x_N}{p_1 + p_2 + \cdots + p_N}}$$

Al principio de curso, un profesor dice a sus alumnos: "Haremos tres exámenes parciales y un final. El segundo examen parcial tendrá una importancia doble que el primero, el tercero doble que el segundo, y el final triple que el tercero". Un alumno obtiene en el primer parcial un 10, en el segundo un 7, en el tercero un 5 y en el final un 4,25. ¿Cuál será su nota de final de curso?

Si p es el coeficiente o importancia que se le aplica a la nota del primer examen, el del segundo será 2p, el del tercero 2(2p) = 4p, y el del examen final será 3(4p) = 12p.

$$\text{Nota final} = \frac{p\cdot 10 + (2p)\cdot 7 + (4p)\cdot 5 + (12p)\cdot 4{,}25}{p + 2p + 4p + 12p} = \frac{95p}{19p} = 5$$

Dada la variable estadística x:

$$\begin{array}{lcll} x = c\cdot y & \Rightarrow & \overline{x} = c\cdot\overline{y} & \text{(c constante)} \\ x = d + y & \Rightarrow & \overline{x} = d + \overline{y} & \text{(d constante)} \\ x = ay + b & \Rightarrow & \overline{x} = a\overline{y} + b & \text{(a, b constantes)} \\ x = y + z & \Rightarrow & \overline{x} = \overline{y} + \overline{z} & \end{array}$$

Los valores exageradamente grandes o pequeños en los extremos de la distribución hacen, generalmente, que la media no sea representativa de la distribución.

Mediana.

Ordenados los valores de la variable de menor a mayor, se llama *mediana* al número tal que el 50% de los valores de la variable son inferiores a él y el 50% superiores.

Para N datos sin agrupar, la mediana es:

- igual al valor central si N es impar.
- igual a la semisuma de los dos valores centrales si N es par.

La mediana de los valores: 3, 4, 4, 5, 6, 7, 12 es 5:

La mediana de los valores 3, 4, 4, 5, 6, 7, 10, 12 es $\frac{5+6}{2} = 5{,}5$

Para datos agrupados la mediana se calcula por la fórmula:

$$\boxed{Me = e_m + \frac{\frac{N}{2} - N_{m-1}}{n_m}\, a_m}$$

siendo: e_m = extremo inferior del intervalo mediano o clase mediana (intervalo donde se encuentra el valor del dato de orden $\frac{N}{2}$)

$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

N_{m-1} = suma de las frecuencias absolutas anteriores a la clase mediana.

n_m = frecuencia de la clase mediana.

a_m = amplitud de la clase mediana.

Para aplicar la fórmula anterior se empieza por hallar el intervalo en que se encuentra la mediana, que es aquél a cuyo extremo inferior corresponde una frecuencia acumulada inferior a la mitad de los datos y a cuyo extremo superior corresponde una frecuencia acumulada superior a la mitad de los datos.

Sea calcular la mediana de la siguiente distribución:

intervalos $e_i - e_{i+1}$	frecuencias n_i	N_i
50 – 56	8	8
56 – 64	15	23
64 – 89	22	45
89 – 93	16	61
93 – 99	5	66

$\frac{N}{2} = \frac{66}{2} = 33$. De la última columna se deduce que el dato de orden igual a 33 está en el tercer intervalo, o sea que el intervalo mediano es el 64 – 89.:

$$Me = 64 + \frac{33-23}{22} \cdot 5 = 64 + 2{,}27 = 66{,}27$$

La mediana suele usarse como medida central de las distribuciones asimétricas. En éstas es más representativa que la media.

La existencia de valores exageradamente grandes o pequeños en los extremos de la distribución no afecta a la mediana, pues el mismo número de observaciones hay por debajo que por encima de la mediana.

Moda.

Es el valor de la variable estadística tal que su frecuencia es mayor que las frecuencias del valor anterior y del valor posterior.

La moda puede no existir, o no ser única. En este último caso, cada una de ellas recibirán el nombre de moda relativa, y, de éstas, la de mayor frecuencia se denomina *moda absoluta o valor modal.* Es la moda absoluta la que generalmente se emplea.

En la distribución

x_i	2	4	7	8	10	13
n_i	1	5	9	13	8	2

la moda es igual a 8.

Para datos agrupados en intervalos de igual amplitud, la moda es un valor situado en el intervalo al que corresponde la mayor frecuencia, este intervalo se llama *intervalo o clase modal.*

Si los intervalos tienen distinta amplitud, el intervalo modal es el que tiene mayor altura, $h_i = \frac{n_i}{a_i}$, en el histograma.

En ambos casos la moda se calcula por la fórmula:

$$\boxed{Mo = e_m + \frac{n_{m+1}}{n_{m-1} + n_{m+1}} \cdot a_m}$$

siendo: e_m = extremo inferior del intervalo modal

n_{m+1} = frecuencia del intervalo posterior al modal

n_{m-1} = frecuencia del intervalo anterior al modal

a_m = amplitud del intervalo modal.

Sea calcular la moda de las distribuciones:

Intervalos	n_i
40 – 50	7
50 – 60	12
60 – 70	15
70 – 80	13
80 – 90	8

Los intervalos tienen todos la misma amplitud.

El intervalo modal es el tercero, que es el que tiene mayor frecuencia.

$$Mo = 60 + \frac{13}{12+13} \cdot 10 = 60 + 5{,}2 = 65{,}2$$

Intervalos	n_i	a_i	$h_i = \frac{n_i}{a_i}$
20 – 25	2	5	0,4
25 – 35	7	10	0,7
35 – 42	6	7	0,86
42 – 50	10	8	1,25
50 – 54	8	4	2
54 – 60	3	6	0,5

Por tener los intervalos distinta amplitud, hemos de calcular las alturas del histograma. De la última columna se deduce que el intervalo modal es el penúltimo: 50 – 54.

$$Mo = 50 + \frac{3}{10+3} \cdot 4 = 50 + 0{,}92 = 59{,}2$$

Relaciones entre la media, la mediana y la moda:

En distribuciones con una única moda, en general, si la distribución es asimétrica positiva, la media es superior a la mediana y ésta superior a la moda:

Mo Me $\bar{x}$

Si la distribución es asimétrica negativa, la media es inferior a la mediana y ésta inferior a la moda.

$\bar{x}$ Me Mo

Si la distribución es simétrica, la media, la mediana y la moda coinciden.

Cuartiles:

Ordenados los datos en orden creciente, los *cuartiles* Q_1, Q_2 y Q_3 son los números que dividen la distribución en cuatro partes con igual número de datos cada una. El 25% de los datos tienen valores inferiores a Q_1, el 50% de los datos tienen valores inferiores a Q_2, y el 75% de los datos tienen valores inferiores a Q_3 (o el 25% tiene valores superiores a Q_3).

Q_2 es igual a la mediana.

En datos sin agrupar se hallan los números naturales iguales o inmediatamente superiores a $\frac{N}{4}$, $\frac{N}{4} \cdot 2$ $\frac{N}{4} \cdot 3$. Los valores de las observaciones correspondientes a estos números naturales son los cuartiles.

Sea la distribución que nos da el número de veces que aparece cada cara de un dado trucado al lanzarlo 42 veces:

x_i	n_i	N_i
1	4	4
2	11	15
3	7	22
4	5	27
5	8	35
6	7	42

$\frac{N}{4} = \frac{42}{4} = 10{,}5 \approx 11$; $\frac{N}{4} \cdot 2 = 21$; $\frac{N}{4} \cdot 3 = 31{,}5 \approx 32$

$Q_1 = 2$, correspondiente a la observación 11

$Q_2 = 3$, correspondiente a la observación 21

$Q_3 = 5$, correspondiente a la observación 32

Para datos agrupados los cuartiles se calculan por la fórmula:

$$\boxed{Q_r = e_i + \frac{\frac{N}{4}.r - N_{i-1}}{n_i} a_i} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

siendo: e_i = extremo inferior del intervalo que contiene el cuartil

$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

N_{i-1} = suma de las frecuencias anteriores al intervalo que contiene el cuartil.

n_i = frecuencia del intervalo que contiene el cuartil.

a_i = amplitud del intervalo que contiene el cuartil.

Sea la distribución adjunta que nos da las notas de un tribunal de Selectividad. Se desea hallar la nota máxima del 25% de los que han obtenido la peor puntuación, y la nota mínima del 25% de los que han obtenido mejor puntuación.

Notas	n_i	N_i
0 – 1	2	2
1 – 2	5	7
2 – 3	7	14
3 – 4	10	24
4 – 5	18	42
5 – 6	22	64
6 – 7	16	80
7 – 8	8	88
8 – 9	3	91
9–10	1	92

Tenemos que hallar el primer y el tercer cuartil.

$\frac{92}{4} = 23 \Rightarrow Q_1$ es la nota del lugar 23, que, observando la columna tercera, está en el cuarto intervalo, 3 – 4:

$$Q_1 = 3 + \frac{23 \cdot 1 - 14}{10} \cdot 1 = 3 + 0{,}9 = \underline{3{,}9}$$

$\frac{92}{4} \cdot 3 = 69 \Rightarrow Q_3$ está en el séptimo intervalo, 6 – 7:

$$Q_3 = 6 + \frac{23 \cdot 3 - 64}{16} \cdot 1 = 6 + 0{,}31 = \underline{6{,}31}$$

Deciles.

Ordenados los datos en orden creciente, los *deciles* $D_1, D_2, \ldots, D_9$ son los números que dividen la distribución en diez partes, con igual número de datos cada una. El 10% de los datos tienen valores inferiores a D_1, el 20% de los datos tienen valores inferiores a $D_2, \ldots$, el 90% de los datos tienen valores inferiores a D_9 (o el 10% tienen valores superiores a D_9).

$D_5 = Q_2 = Me$

Para datos agrupados los deciles se calculan por la fórmula:

$$\boxed{D_r = e_i + \frac{\frac{N}{10} \cdot r - N_{i-1}}{n_i} \cdot a_i} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 9)$$

e_i = extremo inferior del intervalo que contiene el decil

N_{i-1} = suma de las frecuencias anteriores al intervalo que contiene el decil

n_i = frecuencia del intervalo que contiene el decil

a_i = amplitud del intervalo que contiene el decil.

El tribunal de Selectividad del último ejemplo decide aprobar al 60% de los estudiantes que se han presentado. ¿Cuál será la nota mínima con la que se aprobará?

Hay que hallar el decil D_4:

$\frac{92}{10} \cdot 4 = 36{,}8 \Rightarrow D_4$ es la nota del lugar $36{,}8 \approx 37$, que observando la columna N_i está en el intervalo 4 – 5:

$$D_4 = 4 + \frac{\frac{92}{10} \cdot 4 - 24}{18} \cdot 1 = 4 + 0{,}71 = \underline{4{,}71}$$

Percentiles.

Ordenados los datos en orden creciente, los *percentiles* $P_1, P_2, \ldots, P_{99}$ son los números que dividen la distribución en cien partes iguales. El i% de los datos tienen valores inferiores a P_i.

$$P_{10} = D_1\ ;\quad P_{20} = D_2\ ;\cdots;\quad P_{90} = D_9\ ;\quad P_{50} = Q_2 = D_5 = Me\ ;\quad P_{25} = Q_1\ ;\quad P_{75} = Q_3$$

Para datos agrupados los percentiles se calculan por la fórmula:

$$\boxed{P_r = e_i + \frac{\frac{N}{100} \cdot r - N_{i-1}}{n_i} \cdot a_i} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 99)$$

e_i = extremo inferior del intervalo que contiene el percentil

N_{i-1} = suma de las frecuencias anteriores al intervalo que contiene el percentil

n_i = frecuencia del intervalo que contiene el percentil

a_i = amplitud del intervalo que contiene el percentil.

Si el tribunal del ejemplo anterior, decide suspender al 23% de los presentados, ¿cuál es la nota mínima para aprobar?

Hay que hallar el percentil P_{23}:

$\frac{92}{100} \cdot 23 = 21{,}16 \Rightarrow P_{23}$ está en el intervalo 3 – 4: $\quad P_{23} = 3 + \frac{21{,}16 - 14}{10} \cdot 1 = 3 + 0{,}72 = \underline{3{,}72}$

MEDIDAS DE DISPERSION.

Miden la proximidad o alejamiento de los valores de la variable, o bien la concentración de estos valores alrededor de la media aritmética.

Recorrido o rango.

Es la diferencia entre el mayor y el menor de los valores obtenidos de la variable.

Es un examen realizado por 10 personas, las notas obtenidas han sido: 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7. El recorrido o rango es $7 - 3 = 4$.

Desviación media.

Es la media aritmética de los valores absolutos de las diferencias entre los valores de la variable y su media aritmética.

$$\boxed{D_m = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_N - \bar{x}|}{N}}$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ se presentan con las frecuencias $n_1, n_2, \ldots, n_k$

$$\boxed{D_m = \frac{n_1|x_1 - \bar{x}| + n_2|x_2 - \bar{x}| + \cdots + n_k|x_k - \bar{x}|}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}}$$

Esta misma fórmula se emplea para datos agrupados, siendo $x_1, x_2, \ldots, x_k$ las marcas de clase.

Sea la distribución (supuesta dada por las dos primeras columnas):

Intervalos	n_i	Marcas de clase x_i	$n_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - 25{,}3 \rvert$
10 – 16	1	13	13	12,3
16 – 22	5	19	95	6,3
22 – 28	8	25	200	0,3
28 – 34	4	31	124	5,7
34 – 40	2	37	74	11,7
	20		506	36,3

$$\bar{x} = \frac{506}{20} = 25{,}3$$

$$D_m = \frac{36{,}3}{20} = \underline{1{,}815}$$

Intervalo intercuartílico. $\boxed{I_Q = Q_3 - Q_1}$

Intervalo interpercentiles $\boxed{I_P = P_{90} - P_{10}}$

Desviación típica.

Es la medida de dispersión más empleada para estudiar el mayor o menor grado de dispersión de los valores de la variable respecto de su media aritmética.

La desviación típica de $x_1, x_2, \ldots, x_N$ es:

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \cdots + (x_N-\bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2}{N} - \bar{x}^2}}$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_k$ se presentan con las frecuencias $n_1, n_2, \ldots, n_k$:

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{n_1(x_1-\bar{x})^2 + n_2(x_2-\bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k-\bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}} = \sqrt{\frac{n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \cdots + n_kx_k^2}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} - \bar{x}^2}}$$

Esta misma fórmula se emplea para datos agrupados, siendo $x_1, x_2, \ldots, x_k$ las marcas de clase.

La siguiente tabla expresa la distribución de los hijos de 30 familias elegidas al azar en una ciudad:

número de hijos	0	1	2	3	4	5	6	7	8
número de familias	1	1	4	6	7	5	3	2	1

Para hallar la desviación típica operaremos del siguiente modo:

x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
0	1	0	0	0
1	1	1	1	1
2	4	4	8	16
3	6	9	18	54
4	7	16	28	112
5	5	25	25	125
6	3	36	18	108
7	2	49	14	98
8	1	64	8	64
	30		120	578

$$\bar{x} = \frac{120}{30} = 4$$

$$s = \sqrt{\frac{578}{30} - 4^2} = \sqrt{19{,}27 - 16} = \sqrt{3{,}27} = \underline{1{,}81}$$

Si $d_i = x_i - A$, siendo A una constante que se puede elegir arbitrariamente:

$$s = \sqrt{\frac{n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2 + \cdots + n_k d_k^2}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} - \left(\frac{n_1 d_1 + n_2 d_2 + \cdots + n_k d_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}\right)^2}$$

La siguiente tabla expresa la altura, en centímetros, de los alumnos de un curso de COU:

estatura	60 – 64	64 – 68	68 – 72	72 – 76	76 – 80	80 – 84	84 – 88
frecuencia	3	6	8	7	4	3	1

Para calcular la desviación típica operamos así:

Marcas de clase x_i	n_i	$d_i = x_i - 74$	d_i^2	$n_i \cdot d_i$	$n_i \cdot d_i^2$
62	3	− 12	144	−36	432
66	6	− 8	64	−48	384
70	8	− 4	16	−32	128
74	7	0	0	0	0
78	4	4	16	16	64
82	3	8	64	24	192
86	1	12	144	12	12
	32			−64	1212

$$\Rightarrow \quad s = \sqrt{\frac{1212}{32} - \left(\frac{-64}{32}\right)^2} = \sqrt{40{,}4 - 4} = \sqrt{36{,}4} = \underline{6{,}03}$$

Para datos agrupados en que todos los intervalos de clase tienen igual amplitud a, se simplifican los cálculos haciendo $u_i = \frac{x_i - A}{a}$, siendo A una constante elegida arbitrariamente:

$$s = a \cdot \sqrt{\frac{n_1 u_1^2 + n_2 u_2^2 + \cdots + n_k u_k^2}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} - \left(\frac{n_1 u_1 + n_2 u_2 + \cdots + n_k u_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}\right)^2}$$

Los datos que aparecen en la siguiente tabla se han obtenido del precio medio del menú de 60 restaurantes.

pesetas	1200 – 1500	1500 – 1800	1800 – 2100	2100 – 2400
frecuencia	12	4	2	4

pesetas	2400 – 2700	2700 – 3000	3000 – 3300	3300 – 3600
frecuencia	8	5	16	9

Hallar la desviación típica.

(Univ. de Cantabria, 1992)

Los cálculos se disponen así:

Marcas de clase x_i	n_i	$x_i - 2550$	$u_i = \frac{x_i - 2550}{300}$	u_i^2	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$
1350	12	− 1200	− 4	16	− 48	192
1650	4	− 900	− 3	9	− 12	36
1950	2	600	− 2	4	− 4	8
2250	4	− 300	− 1	1	− 4	4
$\boxed{2550}$	8	0	0	0	0	0
2850	5	300	1	1	5	5
3150	16	600	2	4	32	64
3450	9	900	3	9	27	81
	60				− 4	390

$$s = 300 \cdot \sqrt{\frac{390}{60} - \left(\frac{-4}{60}\right)^2} = 300\sqrt{6{,}5 - 0{,}004} = 300 \cdot 2{,}549 = \underline{764{,}7}$$

La desviación típica es la medida de dispersión más utilizada.
Cuanto menor sea la desviación típica, mayor será la representatividad de la media aritmética.
Una distribución se puede representar por su media aritmética y su desviación típica.
Dada la variable estadística x:

$x = y + d \quad \Rightarrow \quad s_x = s_y$ (d constante)

$x = c \cdot y \quad \Rightarrow \quad s_x = |c| \cdot s_y$ (c constantr)

$x = ay + b \quad \Rightarrow \quad s_x = |a| \cdot s_y$ (a y b constantes)

Varianza.

Es el cuadrado de la desviación típica: $\boxed{v = s^2}$

Coeficiente de variación.

Cuando se quiere comparar el grado de dispersión de dos distribuciones que tienen sus medias aritméticas diferentes se utiliza el *coeficiente de variación de Pearson*, que se define como la relación por cociente entre la desviación típica y la media aritmética:

$$\boxed{V = \frac{s}{\bar{x}}}$$

Dadas dos distribuciones, la que posee menor coeficiente de variación tiene menor dispersión relativa, lo que implica que su media aritmética es más representativa.

Dos regiones A y B con el mismo número de habitantes tienen de renta media, respectivamente, 60000 y 56000 pesetas, con desviaciones típicas 18 000 y 14 000. Se desea saber qué renta media es más representativa.

Hallando los coeficientes de variación:

$$\left.\begin{array}{l} V_A = \dfrac{s_A}{\bar{x}_A} = \dfrac{18000}{60000} = 0{,}3 \\ V_B = \dfrac{s_B}{\bar{x}_B} = \dfrac{14000}{56000} = 0{,}25 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ es más representativa la renta media de la región B.}$$

El coeficiente de variación se emplea también para comparar el grado de dispersión de dos distribuciones que están dadas en distinta unidad.

Para comparar los rendimientos de las librerías españolas y alemanas se han elegido las librerías de dos ciudades del mismo número de habitantes. Las librerías de la ciudad española tienen un rendimiento medio de 2300000 pesetas, con una desviación típica de 690000 pesetas. Las librerías de la ciudad alemana tienen un rendimiento medio de 37850 marcos, con una desviación típica de 7570 marcos. ¿En cuál de las ciudades es más representativo el rendimiento medio?.

Hallando los respectivos coeficientes de variación

$$\left.\begin{array}{l} V_e = \dfrac{690000}{2300000} = 0{,}3 \\ V_a = \dfrac{7570}{37850} = 0{,}2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ es más representativo el rendimiento medio de la ciudad alemana.}$$

Si se representa el coeficiente de variación en tantos por ciento, su fórmula es:

$$\boxed{V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100}$$

Variable tipificada.

Cuando se quiere comparar dos distribuciones o dos medidas que no sean la media aritmética y la desviación típica, se obtiene una nueva variable para cada una de las distribuciones, que se llama *variable tipificada*.

Si x es la variable de una distribución, de media aritmética μ_x y desviación típica σ, la variable tipificada z es:

$$\boxed{z = \frac{x - \mu_x}{\sigma}}$$

La variable tipificada z tiene la media aritmética igual a 0, y la desviación típica igual a 1.

En una clase hay 15 alumnos y 20 alumnas. El peso medio de los alumnos es 58,2 kg y el de las 20 alumnas 52,4 kg. Supongamos que las desviaciones típicas de los dos grupos son, respectivamente, 3,1 kg y 5,1 kg. El peso de Juan L. es 70 kg y el de Pilar S. es 65 kg. ¿Cuál de ellos puede, dentro del grupo de alumnos de su sexo, considerarse más grueso?

(Univ. de Madrid, 1991)

Para comparar las dos distribuciones (correspondientes a los alumnos y a las alumnas) se ha de hallar la variable tipificada de cada una de las distribuciones. Si x representa el peso de los alumnos e y el peso de las alumnas:

$$\left.\begin{array}{l} z = \dfrac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \dfrac{x - 58{,}2}{3{,}1} \Rightarrow \text{ para } x = 70\ ; \quad z = \dfrac{70 - 58{,}2}{3{,}1} = 3{,}806 \\[2ex] z = \dfrac{y - \mu_y}{\sigma_y} = \dfrac{y - 52{,}4}{5{,}1} \Rightarrow \text{ para } y = 65\ ; \quad z = \dfrac{65 - 52{,}4}{5{,}1} = 2{,}471 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Juan, dentro del grupo de alumnos es más grueso que Pilar dentro del grupo de alumnas.

PROBLEMAS

12.1 En una clase de COU de 20 alumnos, el número de asignaturas aprobadas por cada uno de los alumnos fue:

3, 6, 7, 7, 3, 7, 5, 5, 4, 5, 7, 5, 7, 7, 3, 4, 2, 7, 6, 1

Formar la tabla de distribución de frecuencias.

(Univ. de Santiago de Compostela)

Valores de la variable x_1	Frecuencias absolutas n_i	Frecuencias relativas $f_i = \frac{n_i}{N}$	Frecuencias absolutas acumuladas N_i	Frecuencias relativas acumuladas $F = \frac{N_i}{N}$
1	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	1	0,05
2	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	2	0,10
3	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15$	5	0,25
4	2	$\frac{2}{20} = 0{,}10$	7	0,35
5	4	$\frac{4}{20} = 0{,}20$	11	0,55
6	2	$\frac{2}{20} = 0{,}10$	13	0,65
7	7	$\frac{7}{20} = 0{,}35$	20	1
	20			

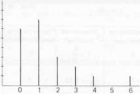
12.2 Un médico atendió en 200 días las siguientes urgencias: 1, 3, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 2, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 3, 1, 4, 0.

1) Resumir los datos en una tabla que muestre frecuencias absolutas y porcentajes, y dibujar el correspondiente diagrama de barras.

2) Calcular la media y la mediana del conjunto de datos. ¿Es simétrica la distribución anterior?

(Univ. de Madrid, 1991)

Valores de la variable x_i	Frecuencias absolutas n_i	Frecuencias relativas $f_i = \frac{n_i}{20}$	Porcentajes en tanto por ciento $f_i \cdot 100$
0	6	$\frac{6}{20} = 0{,}30$	30
1	7	$\frac{7}{20} = 0{,}35$	35
2	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15$	15
3	2	$\frac{2}{20} = 0{,}10$	10
4	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	5
6	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	5
	20		



2) $\bar{x} = \dfrac{6 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 6}{20} = \dfrac{0 + 7 + 6 + 6 + 4 + 6}{20} = \dfrac{29}{20} = \boxed{1{,}45}$

Si ordenáramos los valores de x de menor a mayor, como tenemos 20 valores, número par, la mediana es la semisuma de los valores que ocuparían los lugares 10 y 11:

$$\text{Mediana} = \frac{1+1}{2} = \boxed{1}$$

De la simple observación del diagrama de barras se deduce que la distribución no es simétrica. Por otra parte, al no coincidir la media y la mediana, la distribución no es simétrica.

12.3 **Calcula la media y la mediana de los datos de la tabla adjunta que resume la observación hecha a 30 niños de la edad en meses en que empiezan a andar:**

Meses	9	10	11	12	13	14	15
Frecuencia	1	2	4	13	6	3	1

Analizando la tabla de frecuencias, o bien mediante su representación gráfica, justifica por qué la media es superior a la mediana.

(Univ. de Valencia, 1991)

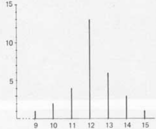
$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 9 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 11 + 13 \cdot 12 + 6 \cdot 13 + 3 \cdot 14 + 1 \cdot 15}{30} = \frac{9 + 20 + 44 + 156 + 78 + 42 + 15}{30} =$$

$$= \frac{364}{30} = 12,13333.. \approx \boxed{12,13}$$

Si ordenamos los valores de x (meses) de menor a mayor, como tenemos 30 valores, la mediana es igual a la semisuma de los dos valores centrales, los que ocupan los lugares 15 y 16.

$$\text{Mediana} = \frac{12+12}{2} = \boxed{12}$$

Haciendo el diagrama de barras se ve que las frecuencias de los valores a la derecha del 12 (mediana) son iguales o mayores que las frecuencias a la izquierda. Este es el motivo de que la media sea mayor que la mediana.



12.4 Las dianas logradas en un campeonato por 25 tiradores fueron: 8, 10, 12, 12, 10, 10, 11, 11, 10, 13, 9, 11, 10, 9, 9, 11, 12, 9, 10, 9, 10, 8, 10, 9, 10.

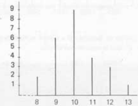
a) Resumir los datos anteriores en una tabla de frecuencias absolutas y relativas y dibujar el correspondiente diagrama de barras.

b) Calcular la media y la mediana del conjunto de datos.

(Univ. de Madrid, 1992)

a)

x_i	n_i	N_i	f_i	$n_i x_i$
8	2	2	0,08	16
9	6	8	0,24	54
10	9	17	0,36	90
11	4	21	0,16	44
12	3	24	0,12	36
13	1	25	0,04	13
	25			253

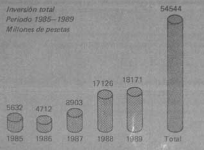


b)

$$\bar{x} = \frac{253}{25} = \boxed{10,12}$$

Ordenados los datos de menor a mayor, la mediana será el valor de la variable que ocupa el lugar central, como hay 25 datos, será el valor del lugar 13. De la columna de las frecuencias acumuladas se deduce que este valor es $\boxed{10}$.

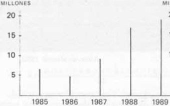
12.5 Represente mediante tres diferentes modos de presentación de datos los que aparecen en la figura.



Calcule la media y dé su interpretación.

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria)

Diagrama de barras



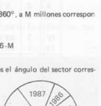
Polígono de frecuencias

Gráfico de Sectores: Si a 54544 millares de pesetas corresponden 360°, a M millones corresponderán x° (por la regla de tres simple)

$$\left.\begin{array}{ll} 54544 & 360^\circ \\ M & x \end{array}\right| \Rightarrow x = \frac{360 \cdot M}{54544} = \frac{360}{54544} \cdot M = 0{,}0066 \cdot M$$

sustituyendo M por el valor de los millares invertidos cada año tendremos el ángulo del sector correspondiente:

$0{,}0066 \cdot 5632 = 37{,}17^\circ$ correspondientes al año 1985
$0{,}0066 \cdot 4712 = 31{,}10^\circ$ " " " 1986
$0{,}0066 \cdot 8903 = 58{,}76^\circ$ " " " 1987
$0{,}0066 \cdot 17126 = 113{,}03^\circ$ " " " 1988
$0{,}0066 \cdot 18171 = 119{,}93^\circ$ " " " 1989



12.6 Ciertos empleados tienen los siguientes sueldos mensuales en pesetas: 80.000, 105.000, 90.000, 85.000, 120.000, 190.000, 100.000. Calcular el sueldo medio de estos empleados. ¿Es este sueldo medio representativo de los sueldos anteriores? . En caso negativo, proponer una medida que se considere más adecuada para esta situación.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$\bar{x} = \frac{80000 + 105000 + 90000 + 85000 + 120000 + 190000 + 100000}{7} = \frac{770000}{7} = \boxed{110000}$$

El sueldo medio es 110000 pesetas al mes.

Dado que el valor 190000 se aleja mucho de los anteriores, este valor distorsiona el sueldo medio obtenido, por lo que éste no es representativo de los sueldos anteriores.

La mediana, de los valores que nos indican los sueldos mensuales, sería una medida más adecuada del sueldo medio.

Ordenados los sueldos de menor a mayor:

80000, 85000, 90000, 100000, 105000, 120000, 190000

como hay 7 valores, la mediana es el valor del dato que ocupa el cuarto lugar, o sea 100.000.

12.7 Calcula la media y la mediana de los datos de la tabla adjunta que resume la observación hecha a 30 niños de la edad en meses en que empiezan a andar:

Meses	9	10	11	12	13	14	15
Frecuencia	1	2	4	13	6	3	1

(Univ. de Valencia, 1992)

x_i	n_i	N_i	$n_i \cdot x_i$
9	1	1	9
10	2	3	20
11	4	7	44
12	13	20	156
13	6	26	78
14	3	29	42
15	1	30	15
			364

$$\bar{x} = \frac{364}{30} = \boxed{12{,}13}$$

Como hay un número par de datos, la mediana es la semisuma de los dos valores centrales. De la columna de N_i resulta que los datos que ocupan los lugares 15 y 16 son igual a 12:

$$\text{Mediana} = \frac{12+12}{2} = \boxed{12}$$

12.8 Dada la distribución de frecuencias:

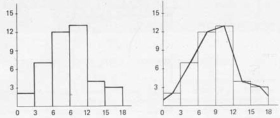
Intervalos	(0, 3)	(3,6	(6,9)	(9,12)	(12,15)	(15,18)
Frecuencias	2	7	12	13	4	3

Se pide:

a) Dibujar el histograma y polígono de frecuencias.
b) Calcular media, moda y mediana.

(Univ. de Castilla–La Mancha, 1991)

a)



b)

Intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencias absolutas n_i	$n_i \cdot x_i$	Frecuencias acumuladas N_i
0 – 3	1,5	2	3	2
3 – 6	4,5	7	31,5	9
6 – 9	7,5	12	90	21
9 – 12	10,5	13	136,5	34
12 – 15	13,5	4	54	38
15 – 18	16,5	3	49,5	41
		41	364,5	

$$\bar{x} = \frac{364,5}{41} = \boxed{8,89}$$

El intervalo modal es el (9,12) cuya frecuencia es 13:

$$\text{Moda} = 9 + \frac{4}{12+4} \cdot 3 = 9 + \frac{12}{16} = \boxed{9,75}$$

Hay 41 datos, la mediana corresponde a la observación 21, que está en el tercer intervalo:

$$\text{Mediana} = 6 + \frac{\frac{41}{2} - 9}{12} \cdot 3 = 6 + \frac{23}{8} = \boxed{8,875}$$

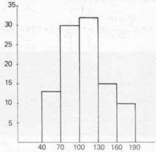
12.9 Los salarios, en miles de pesetas, de 100 empleados de una empresa vienen dados por la tabla:

Miles de pesetas	Número de empleados
40 – 70	13
70 – 100	30
100 – 130	32
130 – 160	15
160 – 190	10

a) Construye el histograma asociado a estos datos.
b) Calcula la moda y la mediana.

(Univ. de Granada)

a)



b) El intervalo modal es el tercero, (100 – 130)

$$\text{Moda} = 100 + \frac{15}{30+15} \cdot 30 = 100 + \frac{450}{45} = 110 \text{ miles de pesetas} = \boxed{110000} \text{ pesetas}$$

	n_i	N_i
40 – 70	13	13
70 – 100	30	43
100 – 130	32	75
130 – 160	15	90
160 – 190	10	100
	100	

El intervalo mediano es el tercero, (100 – 130):

$$\text{Mediana} = 100 + \frac{\frac{100}{2} - 43}{32} \cdot 30 = 100 + \frac{210}{32} =$$

$$= 106{,}562 \text{ miles de pesetas} = \boxed{106562} \text{ pesetas}$$

12.10 Controlando el peso de 50 recién nacidos se han obtenido los siguientes datos: 6 niños pesan menos de 2,5 kg; 9 tienen el peso comprendido entre 2,5 kg y 3 kg; 20 entre 3 y 3,5 kg; 10 entre 3,5 y 4 kg y 5 pesan más de 4 kg y menos de 5. Calcular la media y la mediana.

(Univ. de Málaga)

Formemos la tabla de distribución de frecuencias. Como no conocemos el extremo inferior del primer intervalo, consideraremos que es 1,5, con el fin de que el primer intervalo tenga la misma amplitud que el último.

Intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencias absolutas n_i	Frecuencias acumuladas N_i	$n_i \cdot x_i$
1,5–2,5	2,00	6	6	12
2,5–3,0	2,75	9	15	24,75
3,0–3,5	3,25	20	35	65
3,5–4,0	3,75	10	45	37,5
4,0–5,0	4,50	5	50	22,5
		50		161,75

$$\bar{x} = \frac{161{,}75}{50} = \boxed{3{,}235}$$

El intervalo que contiene a la mediana es el tercero:

$$\text{Mediana} = 3 + \frac{\frac{50}{2} - 15}{20} \cdot 0{,}5 = 3 + \frac{5}{20} = 3 + 0{,}25 = \boxed{3{,}25}$$

12.11 Los resultados obtenidos al lanzar un dado 200 veces vienen reflejados en la siguiente tabla

Número de puntos	1	2	3	4	5	6
Repeticiones	?	32	35	33	?	35

Determinar las frecuencias que faltan sabiendo que la puntuación media es 3,6 y calcular la mediana y la moda.

(Univ. de Salamanca)

Sean a y b las frecuencias que faltan:

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$
1	a	a
2	32	64
3	35	105
4	33	132
5	b	5·b
6	35	210
	135+a+b	511+a+5b

$$\left.\begin{array}{l} a+b+135=200 \\ \bar{x} = \dfrac{511+a+5b}{200} = 3{,}6 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=65 \\ a+5b=209 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\boxed{a=29}$ $\boxed{b=36}$

x_i	n_i	N_i
1	29	29
2	32	61
3	35	96
4	33	129
5	36	165
6	35	200

Hay 200 datos, la mediana es la semisuma de los dos centrales, o sea, la semisuma de los que ocupan los lugares 100 y 101. De la columna de las frecuencias acumuladas resulta:

$$\text{Mediana} = \frac{4+4}{2} = \boxed{4}$$

$$\text{Moda} = \boxed{5}$$

12.12 Se ha realizado un test, compuesto de 10 preguntas a 40 alumnos de un grupo, con los siguientes resultados:

nº de respuestas	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)	(6, 8)	(8, 10)
nº de alumnos	4	9	15	7	5

Se pide:

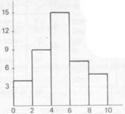
a) Representar gráficamente la distribución.

b) Calcular el valor de la moda.

c) ¿A partir de qué valor se encuentra el 70% de los alumnos que han obtenido la mejor nota?

(Univ. del País Vasco, 1991)

a)



b) El intervalo modal es el tercero, (4, 6):

$$\text{Moda} = 4 + \frac{7}{9+7} \cdot 2 = 4 + \frac{14}{16} = \boxed{4{,}875}$$

c) Tenemos que hallar el percentil 30:

Intervalos	n_i	N_i
0 – 2	4	4
2 – 4	9	13
4 – 6	15	28
6 – 8	7	35
8 – 10	5	40

$\frac{40}{100} \cdot 30 = 12 \Rightarrow$ el percentil 30 se encuentra en el segundo intervalo.

$$P_{30} = 2 + \frac{\frac{40}{100} \cdot 30 - 4}{9} (4-2) = 2 + \frac{8}{9} \cdot 2 = \boxed{3{,}78}$$

12.13 Juan tiene 19 años de edad y mide 1,90 m de estatura. Se dice que su talla está en el percentil 92 para jóvenes de 19 años. ¿Qué quiere decir esto?

(Univ. de Alicante)

El 92% de los jóvenes de 19 años tienen una estatura igual o menor que 1,90 m.

12.14 El departamento de contabilidad de una determinada empresa registró en el mes de mayo de 1989 los siguientes datos relativos a la percepción neta de sueldos para sus empleados:

Haberes netos	Nº de empleados
90 700	2
120 700	14
150 700	31
180 700	22
210 700	15
240 700	3
300 700	1

Calcular la media, mediana y moda de la distribución de sueldos.

(Univ. de Navarra, 1991)

x_i	$d_i = x_i - 180\,700$	n_i	$n_i \cdot d_i$	N_i
90 700	− 90 000	2	−180 000	2
120 700	− 60 000	14	−840 000	16
150 700	− 30 000	31	−930 000	47
$\boxed{180\,700}$	0	22	0	69
210 700	30 000	15	450 000	84
240 700	60 000	3	180 000	87
300 700	120 000	1	120 000	88
		88	−1200000	

$$\bar{x} = 180\,700 + \frac{-1200000}{88} = \boxed{167064}$$

Hay 88 datos, la mediana es igual a la semisuma de los dos centrales, los que ocupan los lugares 44 y 45:

$$\text{Mediana} = \frac{150700 + 150700}{2} = \boxed{150700}$$

$$\text{Moda} = \boxed{150700}$$

12.15 El histograma de la distribución correspondiente a la altura, en pulgadas, de 100 estudiantes es el de la figura adjunta.

a) Formar la tabla de distribución. b) Si el hijo del tío Evaristo mide 72 pulgadas, ¿cuántos alumnos hay más bajos que él? c) Determinar la moda. d) Determinar la mediana. e) ¿A partir de qué valor se encuentra el 25% de los estudiantes más altos?

(Univ. del País Vasco)

a)

Intervalos	n_i	N_i
60 − 63	5	5
63 − 66	18	23
66 − 69	42	65
69 − 72	27	92
72 − 75	8	100
	100	

b) Como 72 es el punto de separación del cuarto y quinto intervalo, hay 92 alumnos de estatura igual o menor a 72 pulgadas.

c) El intervalo modal es el tercero, (66 – 69):

$$\text{Moda} = 66 + \frac{27}{18+27}\cdot 3 = 66 + \frac{81}{45} = \boxed{67{,}8}$$

d) $\frac{100}{2} = 50 \Rightarrow$ el intervalo que contiene la mediana es el tercero, (66 – 69):

$$\text{Mediana} = 66 + \frac{\frac{100}{2} - 23}{42}\cdot 3 = 66 + \frac{81}{42} = \boxed{67{,}93}$$

e) Nos piden el percentil 75 o el cuartil 3:

$\frac{N}{4}\cdot 3 = \frac{100}{4}\cdot 3 = 75 \Rightarrow$ el tercer cuartil está en el intervalo cuarto, (69 – 72):

$$Q_3 = 69 + \frac{\frac{100}{4}\cdot 3 - 65}{27}\cdot 3 = 69 + \frac{30}{27} = \boxed{70{,}11}$$

12.16 Obténgase el primer cuartil, el séptimo decil y el percentil del lugar 53 en la siguiente distribución:

$e_i - e_{i+1}$	n_i
2–6	17
6–10	12
10–15	11
15–25	8
25–32	5
32–40	16
40–45	29

(Univ. de Navarra, 1991)

Intervalos	n_i	N_i
2 – 6	17	17
6 – 10	12	29
10 – 15	11	40
15 – 25	8	48
25 – 32	5	53
32 – 40	16	69
40 – 45	29	98

$\frac{98}{4} = 24'5$, el primer cuartil está en el segundo intervalo, (6 – 10):

$$Q_1 = 6 + \frac{\frac{98}{4}\cdot 1 - 17}{12}(10-6) = 6 + \frac{7{,}5}{12}\cdot 3 = \boxed{7{,}875}$$

$\frac{98}{10}\cdot 7 = 68'6$, el séptimo decil está en sexto intervalo, (32 – 40):

$$D_7 = 32 + \frac{\frac{98}{10}\cdot 7 - 53}{16}\cdot(40-32) = 32 + \frac{15{,}6}{16}\cdot 8 = \boxed{39{,}8}$$

$\frac{98}{100}\cdot 53 = 51'94$, el percencil 53 está en el quinto intervalo, (25 – 32):

$$P_{53} = 25 + \frac{\frac{98}{100}\cdot 53 - 48}{5}(32-25) = 25 + \frac{3{,}94}{5}\cdot 7 = \boxed{30{,}516}$$

12.17 Del ayuntamiento de cierto pueblo se han obtenido los siguientes datos sobre el número de fincas agrícolas en relación con la superficie explotada:

Superficie (en Ha)	nº de fincas
0 – 5	2
5 – 10	10
10 – 15	3
15 – 20	4
20 – 25	1

a) Calcular la superficie media de explotación, la moda y la mediana.
b) Calcular los cuartiles de la distribución, explicando lo que significa cada uno.
c) Representar gráficamente la distribución.

(Univ. de La Laguna, 1991)

a)

Intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencias n_i	Frecuencias acumuladas N_i	$n_i \cdot x_i$
0 – 5	2,5	2	2	5
5 – 10	7,5	10	12	75
10 – 15	12,5	3	15	37,5
15 – 20	17,5	4	19	70
20 – 25	22,5	1	20	22,5
		20		210

Superficie media de explotación: $x = \frac{210}{20} = \boxed{10,5}$ Ha

El intervalo modal es el segundo, (5 – 10): Moda $= 5 + \frac{3}{2+3} \cdot 5 = 5 + 3 = \boxed{8}$

$\frac{20}{2} = 10 \Rightarrow$ el intervalo que contiene a la mediana es el segundo, (5 – 10):

$$\text{Mediana} = 5 + \frac{\frac{20}{2} - 2}{10} \cdot 5 = 5 + \frac{40}{10} = \boxed{9}$$

b) $\frac{20}{4} = 5 \Rightarrow$ el primer cuartil está en el intervalo segundo, (5 – 10):

$$Q_1 = 5 + \frac{\frac{20}{4} \cdot 1 - 2}{10} \cdot 5 = 5 + \frac{15}{10} = \boxed{6,5}$$

$\frac{20}{4} \cdot 2 = 10 \Rightarrow$ el segundo cuartil está en el intervalo segundo, (5 – 10)

$$Q_2 = 5 + \frac{\frac{20}{4} \cdot 2 - 2}{10} \cdot 5 = 5 + \frac{40}{10} = \boxed{9}$$

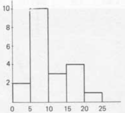
Podíamos habernos evitado este calculo considerando que el segundo cuartil coincide con la media-

$\frac{20}{4} \cdot 3 = 15 \Rightarrow$ el tercer cuartil está en el intervalo tercero:

$$Q_3 = 10 + \frac{\frac{20}{4} \cdot 3 - 12}{3} \cdot 5 = 10 + \frac{15}{3} = \boxed{15}$$

El 25% de los datos tienen valores inferiores a 6,5, la mitad de los datos tiene valores inferiores a 9 y el 75% de los datos tiene valores inferiores a 15.

c)



12.18 Los alumnos de un grupo de primero de Empresariales se clasifican por la edad según esta tabla:

Edad	17 – 19	19 – 21	21 – 23	23 – 25
Número de alumnos	21	57	33	9

Estudiar la media, moda, mediana y desviación típica.

(Univ. de Islas Baleares, 1991)

Edad (intervalos)	Marcas de clase x_i	Frecuencia absoluta n_i	Frecuencia acumulada N_i	$n_i \cdot x_1$
17 – 19	18	21	21	378
19 – 21	20	57	78	1140
21 – 23	22	33	111	726
23 – 25	24	9	120	216
		120		2460

$\bar{x} = \frac{2460}{120} = \boxed{20{,}5}$

El intervalo modal es el segundo: $\text{Moda} = 19 + \frac{33}{21 + 33} \cdot 2 = 19 + \frac{66}{54} = \boxed{20{,}2}$

El intervalo que contiene a la mediana es el segundo:

$$\text{Mediana} = 19 + \frac{\frac{120}{2} - 21}{57} \cdot 2 = 19 + \frac{78}{57} = \boxed{20{,}4}$$

Como $\bar{x} = 20,5$:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	n_i	$n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
18	−2,5	6,25	21	131,25
20	−0,5	0,25	57	28,5
22	1,5	2,25	33	74,25
24	3,5	12,25	9	110,25
			120	344,25

$$\Rightarrow \quad s = \sqrt{\frac{344,25}{120}} = \sqrt{2,87} = \boxed{1,7}$$

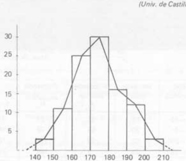
12.19 La siguiente tabla corresponde a la distribución de las tallas de 100 alumnos:

Tallas (cm)	Frecuencias
140 − 150	3
150 − 160	11
160 − 170	25
170 − 180	30
180 − 190	16
190 − 200	12
200 − 210	3

Se pide: a) Histograma y polinomio de frecuencias.
b) Calcular la desviación media y la varianza.

(Univ. de Castilla – La Mancha)

a)



b) De la tabla de la página siguiente resulta:

$$\bar{x} = \frac{17430}{100} = 174,3 \ ; \quad D_m = \frac{1065,4}{100} = \boxed{10,654}$$

$$s^2 = \frac{3056700}{100} - (174'3)^2 = 30567 - 30380'49 = \boxed{186,51}$$

Marcas de clase x_i	Frecuencias n_i	$n_i \cdot x_i$	$d_i = x_i - \bar{x}$	$n_i \cdot \lvert d_i \rvert$	x_i^2	$n_i \cdot x_i^2$
145	3	435	−29,3	87,9	21025	63075
155	11	1705	−19,3	212,3	24025	264275
165	25	4125	− 9,3	232,5	27225	680625
175	30	5250	0,7	21	30625	918750
185	16	2960	10,7	175,2	34225	547600
195	12	2340	20,7	248,4	38025	456300
205	3	615	30,7	92,1	42025	126075
	100	17430		1065,4		3056700

12.20 Se preguntó a 62 personas cuánto tiempo habían dedicado a ver la televisión durante un cierto fin de semana. Los datos obtenidos son los siguientes:

Tiempo en horas	0–0,5	0,5–5	1,5–2,5	2,5–4	4–8
Número de personas	10	10	18	12	12

Hállese la media, la mediana y la desviación típica.
Dibújese el histograma de frecuencias.

(Univ. de Málaga, 1991)

Como la amplitud de los intervalos es distinta, tendremos que hallar las alturas de los rectangulos del histograma, que han de ser iguales (o proporcionales) a h_i, siendo:

$$h_i = \frac{\text{frecuencia del intervalo}}{\text{amplitud del intervalo}} = \frac{n_i}{a_i}$$

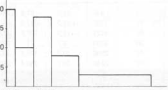
Intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencias n_i	$h_i = \frac{n_i}{a_i}$	N_i	$n_i \cdot x_i$	x_i^2	$n_i \cdot x_i^2$
0–0,5	0,25	10	$\frac{10}{0,5} = 20$	10	2,5	0,0625	0,625
0,5–1,5	1	10	$\frac{10}{1} = 10$	20	10	1	10
1,5–2,5	2	18	$\frac{18}{1} = 18$	38	36	4	72
2,5–4	3,25	12	$\frac{12}{1,5} = 8$	50	39	10,5625	126,75
4–8	6	12	$\frac{12}{4} = 3$	62	72	36	432
		62			159,5		641,375

$$\bar{x} = \frac{159,5}{62} = \boxed{2,5726}$$

$\frac{62}{2} = 31 \Rightarrow$ el intervalo que contiene a la mediana es el tercero, 1,5–2,5:

$$\text{Mediana} = 1,5 + \frac{\frac{62}{2} - 20}{18} \cdot 1 = 1,5 + \frac{11}{18} = \boxed{2,1111}$$

$$s = \sqrt{\frac{641{,}375}{62} - (2{,}5726)^2} = \sqrt{10{,}3448 - 6{,}6183} = \sqrt{3{,}7265} = \boxed{1{,}93}$$



12.21 Una oficina bancaria ha tabulado las cantidades de dinero que retiraron 100 clientes en un determinado día:

Pts. (en miles)	nº de clientes
0 – 20	33
20 – 40	27
40 – 60	19
60 – 80	14
80 – 100	7

Hallar:

a) Cantidad media de dinero retirado por cada cliente y desviación típica.

b) La mediana. Interpretar el resultado.

(Univ. de Castilla–La Mancha,1991)

a)

Intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencia n_i	$n_i\,x_i$	x_i^2	$n_i\,x_i^2$	N_i
0– 20	10	33	330	100	3300	33
20– 40	30	27	810	900	24300	60
40– 60	50	19	950	2500	47500	79
60– 80	70	14	980	4900	68600	93
80–100	90	7	630	8100	56700	100
	100		3700		200400	

$\overline{x} = \frac{3700}{100} = \boxed{37}$ $\Rightarrow$ 37.000 pts. es la cantidad media de dinero retirado por cada cliente.

$s = \sqrt{\frac{200400}{100} - 37^2} = \sqrt{635} = \boxed{25{,}20}$

b) $\frac{100}{2} = 50$ $\Rightarrow$ el intervalo que contiene a la mediana es el segundo, 20 – 40, (véase la columna de las frecuencias acumuladas).

$$\text{Mediana} = 20 + \frac{\frac{100}{2} - 33}{27} \cdot 20 = 20 + \frac{340}{27} = \boxed{32{,}59}$$

Al ser la distribución unimodal y la media mayor que la mediana, la distribución es asimétrica positiva.

12.22 **De una muestra de 75 pilas eléctricas, se han obtenido los siguientes datos sobre duración en horas:**

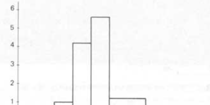
Duración	(25, 30)	(30, 35)	(35, 40)	(40, 45)	(45, 55)	(55, 70)
nº de pilas	3	5	21	28	12	6

a) Represente gráficamente estos datos.
b) Obtenga el porcentaje de pilas que, en dicha muestra, duran menos de 40 horas.
c) Tomando los centro de los intervalos, calcule la media y la varianza de la duración. ¿Qué miden estos parámetros?

(Univ. de Granada, 1991)

a) Como no es igual la amplitud de todos los intervalos, tendremos que hallar las alturas de los rectángulos del histograma, que han de ser igual a h_i, siendo $h_i = \frac{n_i}{a_i}$:

Intervalo	Marca de clase x_i	Frecuencias n_i	$h_i = \frac{n_i}{a_i}$	$d_i = x_i - 37'5$	d_i^2	$n_i \cdot d_i$	$n_i \cdot d_i^2$
25 – 30	27,5	3	$\frac{3}{5} = 0{,}6$	−10	100	−30	300
30 – 35	32,5	5	$\frac{5}{5} = 1$	−5	25	−25	125
35 – 40	$\boxed{37{,}5}$	21	$\frac{21}{5} = 4{,}2$	0	0	0	0
40 – 45	42,5	28	$\frac{28}{5} = 5{,}6$	5	25	140	700
45 – 55	50	12	$\frac{12}{10} = 1{,}2$	12,5	156,25	150	1875
55 – 70	62,5	6	$\frac{6}{15} = 0{,}4$	25	625	150	3750
		75				385	6750



b) Duran menos de 40 horas: $3+5+21=29$ pilas de un total de 75

$$\left.\begin{array}{l} 75 - 29 \\ 100 - x \end{array}\right| \quad x = \frac{100 \cdot 29}{75} = \boxed{38{,}67\%}$$

c) $\bar{x} = 37{,}5 + \frac{385}{75} = \boxed{42{,}63}$; $v = s^2 = \frac{6750}{75} - \left(\frac{385}{75}\right)^2 = 90 - 26{,}35 = \boxed{63{,}65}$

La media es una medida de centralización o de posición alrededor de la que se agrupan los distintos valores de la variable, y que permite sustituir todos los datos por un número. En este caso podemos decir que las pilas de la muestra duran 42,63 horas.

La varianza es una medida de dispersión que nos da una indicación general sobre la manera que los valores de la variable están más o menos agrupados alrededor de la media. Conforme sea menor la varianza los valores están más concentrados alrededor de la media y ésta es más representativa de la distribución estudiada.

12.23 Se ha realizado una encuesta sobre opiniones políticas a un colectivo de 88 alumnos universitarios, arrojando los siguientes resultados (puntuación cero = extrema derecha, puntuación cien = extrema izquierda):

Puntuación (38–44)..................7 alumnos
Puntuación (44–50)..................8 alumnos
Puntuación (50–56)................15 alumnos
Puntuación (56–62)................25 alumnos
Puntuación (62–68)................18 alumnos
Puntuación (68–74)..................9 alumnos
Puntuación (74–80)..................6 alumnos

Halla la media y la mediana, el percentil 90 y la desviación típica de esta variable estadística.

(Univ. de Cantabria)

Intervalos	Marcas de clase x_i	Frecuencias n_i	$u_i = \frac{x_i - 59}{6}$	u_i^2	$n_i \cdot u_i$	$n_i \cdot u_i^2$	N_i
38–44	41	7	−3	9	−21	63	7
44–50	47	8	−2	4	−16	32	15
50–56	53	15	−1	1	−15	15	30
56–62	$\boxed{59}$	25	0	0	0	0	55
62–68	65	18	1	1	18	18	73
68–74	71	9	2	4	18	36	82
74–80	77	6	3	9	18	54	88
		88			2	218	

$\bar{x} = 59 + \frac{2}{88} \cdot 6 = 59 + \frac{12}{88} = \boxed{59{,}14}$

$\frac{88}{2} = 44 \Rightarrow$ el intervalo que contiene a la mediana es el cuarto, $56 - 62$:

$$\text{Mediana} = 56 + \frac{\frac{88}{2} - 30}{25} \cdot 6 = 56 + 3{,}36 = \boxed{59{,}36}$$

$\frac{88}{100} \cdot 90 = 79{,}2 \Rightarrow$ el percentil 90 está en el penúltimo intervalo, 68 – 74:

$$P_{90} = 68 + \frac{\frac{88}{100} \cdot 90 - 73}{9} \cdot 6 = 68 + 4{,}13 = \boxed{73{,}13}$$

$$s = 6 \cdot \sqrt{\frac{218}{88} - \left(\frac{2}{88}\right)^2} = 6 \cdot \sqrt{2{,}4773 - 0{,}0005} = 6 \cdot 1{,}5738 = \boxed{9{,}44}$$

Al ser la mediana 59,36, el 50% de los estudiantes ha obtenido una puntuación superior a 59,36. Si suponemos que los 50 puntos es la puntuación que divide a la derecha de la izquierda, el valor de la mediana nos dice que hay más gente de izquierda que de derecha.

El percentil 90 igual a 72,13 nos dice que el 10% de los estudiantes obtuvo una puntuación mayor que 72,13

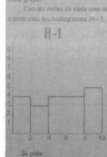
La media igual a 59,14 y la desviación típica igual a 9,44, nos dice que la mayoría de los estudiantes obtuvo una puntuación comprendida entre $59{,}14 - 9{,}44 = 49{,}7$ y $59{,}14 + 9{,}44 = 68{,}58$. Se induce que la mayoría son de centro–izquierda.

12.24 En la tabla adjunta se indica la media y la desviación típica de las notas no agrupadas correspondientes a un exámen que ha sido realizado por los alumnos de tres grupos diferenctes A, B y C, con 20 alumnos cada grupo.

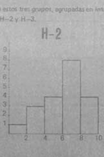
	A	B	C
Media	4.35	6.28	5.33
Desv. típica	2.37	2.20	2.68

Con las notas de cada uno de estos tres grupos, agrupadas en intervalos de igual longitud, se han construido los histogramas H–1, H–2 y H–3.

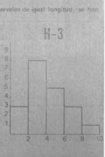
H-1



H-2



H-3



Se pide:

a) Razona cada uno de estos histogramas a qué grupo de notas pertenece, a las del grupo A, las del B o las del C.

b) Tomando el centro de cada intervalo como representante de clase, calcular la media y la desviación típica correspondiente a cada uno de estos histogramas.
Comprueba si los resultados obtenidos en b) confirman tu razonamiento del apartado a).

(Univ. de Valencia, 1991)

a) Los datos están más dispersos en H – 1, este histograma debe corresponderse con el grupo de mayor desviación típica, el C. El histograma H – 3 parece ser el de menor media, debe corresponderse con el grupo A.

De lo anterior se deduce que los histogramas H – 1, H – 2 y H – 3 se corresponden, respectivamente, con los grupos C, B y A.

H–1

x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
1	4	1	4	4
3	3	9	9	27
5	4	25	20	100
7	4	49	28	196
9	5	81	45	405
	20		106	732

$$\bar{x} = \frac{106}{20} = 5{,}3 \ ; \ \sigma = \sqrt{\frac{732}{20} - (5{,}3)^2} = \sqrt{36{,}6 - 28{,}09} = $$
$$= \sqrt{8{,}51} = 2{,}92$$

H–2

x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
1	1	1	1	1
3	3	9	9	27
5	4	25	20	100
7	8	49	56	392
9	4	81	36	324
	20		122	844

$$\bar{x} = \frac{122}{20} = 6{,}1 \ ; \ \sigma = \sqrt{\frac{844}{20} - (6{,}1)^2} = \sqrt{42{,}2 - 37{,}21} = $$
$$= \sqrt{4{,}99} = 2{,}23$$

H–3

x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
1	3	1	3	3
3	8	9	24	72
5	5	25	25	125
7	3	49	21	147
9	1	81	9	81
	20		82	428

$$\bar{x} = \frac{82}{20} = 4{,}1 \ ; \ \sigma = \sqrt{\frac{428}{20} - (4{,}1)^2} = \sqrt{21{,}4 - 16{,}81} = $$
$$= 2{,}14$$

	H–1	H–2	H–3
Media	5,3	6,1	4,1
Desv. típica	2,92	2,23	2,14

Estos resultados confirman el razonamiento del apartado a).

12.25 **La asistencia de espectadores a cada sala de la cadena de cines "El Cisne" el día 17 de junio fue de 200, 500, 300 y 1.000 personas.**

Calcular la dispersión del número de asistentes. ¿Cómo se puede valorar esta dispersión?

Si el día del espectador acuden 50 personas más a cada sala, ¿qué efecto tendría sobre la dispersión?

(Univ. de Oviedo, 1991)

La dispersión se puede valorar con la desviación típica y el coeficiente de variación.

$$\bar{x} = \frac{200 + 300 + 500 + 1000}{4} = 500$$

$$s = \sqrt{\frac{(200-500)^2 + (300-500)^2 + (500-500)^2 + (1000-500)^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{90000 + 40000 + 0 + 250000}{4}} = \sqrt{950000} = 308{,}22$$

$$V = \frac{100 \cdot s}{\bar{x}} = \frac{100 \cdot 308{,}22}{500} = 61{,}6\,\%$$

Si a los números de asistencia de cada sala se les añade 50 personas más, la media aumenta en 50, ahora será 550, y la desviación típica no varía. El nuevo coeficiente de variación será:

$$V = \frac{100 \cdot 308{,}22}{550} = 56{,}04\,\%$$

Como el nuevo coeficiente de variación es menor, la dispersión ha disminuido.

12.26 Considérense los siguientes valores: 2, 3, 3, 5, 7. Obtener otro conjunto de 5 datos que incluya los valores 2, 3, 6, y que tenga la misma media, la misma mediana y mayor varianza.

(Univ. de Madrid, 1991)

$$\bar{x} = \frac{2+3+3+5+7}{5} = 4\,; \qquad \text{Me} = 3, \text{ igual al valor central.}$$

Sean a y b los números buscados: $\frac{a+b+2+3+6}{5} = 4 \Rightarrow a+b=9$

Como la varianza expresa la dispersión de los datos respecto de la media, tendremos que hallar dos números a y b que sumen 9, lo más alejados de 4 y que con 2, 3, 6, formen cinco números tales que ordenados de menor a mayor el central sea 3.

$$\boxed{1, 2, 3, 6, 8}$$

12.27 Sea X una variable estadística de valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$, y de frecuencias $n_1, n_2, \ldots, n_k$ respectivamente. Para $r \in \{0, 1, 2\}$ y un número $a \in R$ definimos

$$m_r(a) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - a)^r n_i$$

donde $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Si denotamos por $\bar{x}$ la media y por σ la desviación típica de X calcular en función de ellas ($\bar{x}$ y σ) los valores

$$m_0(0)\,,\; m_1(0)\,,\; m_2(0)\,,\; m_0(\bar{x})\,,\; m_1(\bar{x})\,,\; m_2(\bar{x})$$

(Univ. de Murcia)

Se tiene que $$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{N}\,;$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(\bar{x}-x_1)^2 + n_2(\bar{x}-x_2)^2 + \cdots + n_k(\bar{x}-x_k)^2}{N}} = \sqrt{\frac{n_1x_1^2 + n_1x_2^2 + \cdots + n_kx_k^2}{N} - \bar{x}^2}$$

$$m_0(0) = \frac{1}{N}\left((x-0)^0 n_1 + (x_2-0)^0 n_2 + \cdots + (x_k-0)^0 n_k\right) = \frac{1}{N}(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) = \frac{1}{N} = 1$$

$$m_1(0) = \frac{1}{N}\left((x_1-0)^1 n_1 + (x_2-0)^1 n_2 + \cdots + (x_k-0)^1 n_k\right) = \frac{1}{N}(x_1 n_1 + x_1 n_1 + \cdots + x_k n_k) = \bar{x}$$

$$m_2(0) = \frac{1}{N}(x_1^2 n_1 + x_2^2 n_2 + \cdots + x_k^2 n_k) = \sigma^2 + \bar{x}^2$$

$$m_o(\bar{x}) = \frac{1}{N}\left((x_1-\bar{x})^0 n_1 + (x_2-\bar{x})^0 n_1 + \cdots + (x_k-\bar{x})^0 n_k\right) = \frac{1}{N}(n_1+n_2+\cdots+n_k) = \frac{N}{N} = 1$$

$$m_1(\bar{x}) = \frac{1}{N}\left((x_1-\bar{x})^1 n_1 + (x_2-\bar{x})^1 n_2 + \cdots + (x_2-\bar{x})^1 n_k\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\left((x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_k n_k) - \bar{x}(n_1+n_2+\cdots+n_k)\right) = \frac{1}{N}(\bar{x}\cdot N - \bar{x}\cdot N) = 0$$

$$m_2(\bar{x}) = \frac{1}{N}\left((x_1-\bar{x})^2 n_1 + (x_2-\bar{x})^2 n_2 + \cdots + (x_k-\bar{x})^2 n_k\right) = \sigma^2$$

12.28 En un grupo de sociología se han obtenido las siguientes puntuaciones en un test de habilidad mental:

50 23 45 36 56 34 56 67 45 34 23 45 23 67 54 21 34 43 12 78 36
49 53 27 66 31 45 22 33 44 48 53 57 77 31 23 47 52 33 37 64 21

Comprobar si en el intervalo $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ se encuentra aproximadamente el 68% de los datos. ($\bar{x}$ = media; s = desviación típica).

(Univ. de La Laguna, 1991)

Los valores extremos son 12 y 78. Podemos hacer la siguiente tabla de distribución:

Intervalos	Frecuencias n_i	Marcas de clase x_i	$u_i = \frac{x_i - 45}{10}$	u_i^2	$n_i \cdot u_i$	$n_i \cdot u_i^2$
10 – 20	1	15	– 3	9	– 3	9
20 – 30	8	25	– 2	4	–16	32
30 – 40	10	35	– 1	1	–10	10
40 – 50	9	$\boxed{45}$	0	0	0	0
50 – 60	8	55	1	1	8	8
60 – 70	4	65	2	4	8	16
70 – 80	2	75	3	9	6	18
	42				–7	93

$$\bar{x} = 45 + \frac{-7}{42}\cdot 10 = 43{,}33\ ; \quad s = 10\sqrt{\frac{93}{42} - \left(\frac{-7}{42}\right)^2} = 10\sqrt{2{,}21 - 0{,}03} = 14{,}76$$

$$(\bar{x}-s, \bar{x}+s) = (43{,}33 - 14{,}76\ ,\ 43{,}33 + 14{,}76) = (28{,}57\ ,\ 58{,}09)$$

En el intervalo (30,40) hay 10 datos y en el (40,50) hay 9. Como se supone que los datos se distribuyen uniformemente dentro de cada intervalo, veamos cuantos datos de los 8 que hay en el intervalo (20,30) hay en el intervalo (28'57 , 30), y cuántos datos de los 8 que hay en el intervalo (50,60) hay en el intervalo (50, 58,09):

$$30 - 28{,}57 = 1{,}43: \quad \left.\begin{array}{l} 10 - 8 \\ 1{,}43 - x \end{array}\right| \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 1{,}43}{10} = 1{,}14$$

$$58{,}09 - 50 = 8{,}09 \quad \left.\begin{array}{l} 10 - 8 \\ 8{,}09 - x \end{array}\right| \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 8{,}09}{10} = 6{,}47$$

$10 + 9 + 1{,}14 + 6{,}47 = 26{,}61$ datos hay en el intervalo $(\overline{x} - s, \overline{x} + s)$:

$$\left.\begin{array}{l} 42 - 100 \\ 26{,}61 - x \end{array}\right| \Rightarrow x = 63{,}35 \approx 63\% \text{ de los datos están en el intervalo } (\overline{x} - s, \overline{x} + s).$$

12.29 A dos grupos de ocho profesores de letras (grupo A) y de ciencias (grupo B) se les ha planteado un test de cultura general con 100 preguntas, arrojano el siguiente numero de contestaciones acertadas:

Grupo A	46	48	49	50	50	51	52	54
Grupo B	10	18	30	50	50	70	82	90

Halla para cada uno de los grupos la media, moda y mediana, así como la desviación típica. Interpreta los resultados.

(Univ. de Cantabria, 1991)

Grupo A:

x_i	$d_i = x_i - 50$	d_i^2
46	−4	16
48	−2	4
49	−1	1
50	0	0
50	0	0
51	1	1
52	2	4
54	4	16
	0	42

$\overline{x}_A = 50 + \frac{0}{8} = \boxed{50}$

Moda = 50 (es el único valor que se repite)

Mediana $= \frac{50 + 50}{2} = \boxed{50}$ (semisuma de los dos valores centrales).

$s_A = \sqrt{\frac{42}{8} - \left(\frac{0}{8}\right)^2} = \sqrt{5{,}25} = \boxed{2{,}29}$

Grupo B:

x_i	x_i^2
10	100
18	324
30	900
50	2500
50	2500
70	4900
82	6724
90	8100
400	26048

$\overline{x}_B = \frac{400}{8} = \boxed{50}$

Moda = $\boxed{50}$ (es el único valor que se repite)

Mediana $= \frac{50 + 50}{2} = \boxed{50}$

$s_B = \sqrt{\frac{26048}{8} - 50^2} = \sqrt{3256 - 2500} = \sqrt{756} = \boxed{27{,}50}$

Al ser iguales, en ambos grupos, la media, la moda y la mediana, la información que podemos sacar de estos resultados es que los dos grupos son igualmente cultos.

En ambos grupos la media es igual (50), pero al ser las desviaciones típicas $s_A = 2{,}29$ y $s_B = 27{,}50$, nos dice que las contestaciones acertadas del grupo A están muy concentradas alrededor de la media, o sea, hay muy poca diferencia en el nivel cultural de los profesores del grupo A; y las contestaciones acertadas del grupo B están muy dispersas respecto de la media, hay mucha diferencia en el nivel cultural de los profesores del grupo B.

12.30 Un profesor ha realizado dos test a un grupo de 40 alumnos, obteniendo los siguientes resultados:

Para el primer test la media es 6 y la desviación típica 1,5.

Para el segundo test la media es 4 y la desviación típica es 0,5.

Un alumno obtiene un 6 en el primero y un 5 en el segundo. En relación con el grupo, ¿en cuál de los test obtuvo mejor puntuación?

(Univ. de Málaga)

Hay que hallar los valores tipificados de las notas de cada uno de los test:

$$z = \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} = \frac{x-6}{1{,}5}\;; \quad \text{para } x=6: \quad z_1 = \frac{6-6}{1{,}5} = 0$$

$$z = \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} = \frac{y-0}{0{,}5}\;; \quad \text{para } y=5: \quad z_2 = \frac{5-4}{0{,}5} = 2$$

En el segundo test obtuvo mejor puntuación, respecto de su grupo.

12.31 Una persona A mide 1,75 m y reside en una ciudad donde la estatura media es de 1,60 m y su desviación típica es de 20 cm. Otra persona B mide 1,80 m y vive en una ciudad donde la estatura media es de 1,70 m y la desviación típica es de 15 cm. ¿Cuál de las dos será más alta respecto a sus conciudadanos?

(Univ. de Murcia, 1991)

Hay que hallar la variable tipificada de cada una de las poblaciones:

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} = \frac{175-160}{20} = 0{,}75 \\ z &= \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} = \frac{180-170}{15} = 0{,}67 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

la persona A será más alta respecto a sus conciudadanos que la persona B respecto a los suyos.

CAPITULO 13

RECTA DE REGRESION CORRELACION

VARIABLES ESTADISTICAS BIDIMENSIONALES.

El estudio simultáneo de dos caracteres cuantitativos de los individuos de una población da lugar a las variables estadísticas bidimensuales, de las que se desea hallar el *grado de dependencia o correlación.*

Cada observación (o cada individuo) da lugar a un par de números (x, y), el primero nos da el valor de la variable aleatoria X y el segundo el valor de la variable aleatoria Y.

Si se desea estudiar la relación entre la edad y la altura de los niños de un colegio, (13,60) simboliza que un niño determinado tiene 13 años y pesa 60 kg.

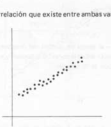
Las n observaciones del estudio se suelen disponer en forma de tabla

x	x_1	$x_2 \cdots x_n$
y	y_1	$y_2 \cdots y_n$

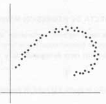
Representando los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ en un sistema de coordenadas cartesiano, tendremos la *nube de puntos* o *diagrama de dispersión.*

La nube de puntos nos puede dar una ligera idea de la correlación que existe entre ambas variables:

– si el diagrama de dispersión se condensa en torno a una línea recta, la correlación es *lineal.*

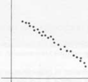


– si el diagrama de dispersión se condensa alrededor de una curva, la correlación es *curvilínea.*

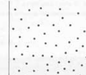


– si al crecer el valor de X crece también el valor de Y, la correlación es *positiva o directa*.

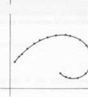
– si al crecer el valor de X decrece el de Y, la correlación es *negativa* o *inversa*.



– si el diagrama de dispersión está constituido por puntos dispuestos al azar en el plano, no existe ninguna dependencia o correlación entre ambas variables, éstas están *incorreladas*.



– si todos los puntos del diagrama de dispersión están sobre la curva de ecuación $y = f(x)$, la correlación es *funcional*.



RECTA DE REGRESION MINIMO CUADRATICA.

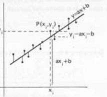
Se llama *regresión matemática* al resultado de sustituir la nube de puntos correspondientes a una distribución bidimensional por la función matemática que mejor se ajuste a ella.

Se llama **recta de regresión de y sobre x**, la recta de ecuación:

$$y = ax + b$$

que mejor se ajusta a la nube de puntos correspondiente a los valores $(x_1, y_2), \dots (x_n, y_n)$.

Se llama *residuo* correspondiente a la observación (x_i, y_i) a la diferencia de la ordenada del punto $P_i(x_i, y_i)$ y la ordenada de la recta de regresión de y sobre x correspondiente al valor x_i, o sea al valor:



$$y_i - (ax_i + b) = y_i - ax_i - b$$

Se dice que la recta $y = ax + b$ es la que mejor se ajusta a la nube de puntos si los valores de a y b son los que hacen mínima la suma de los cuadrados de los n residuos. O sea, a y b hacen mínima la expresión:

$$E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 + a^2x_i^2 + b^2 - 2ax_i\,y_i - 2by_i + 2a\,bx_i)$$

Los valores de a y b que hacen mínimo la expresión E son los que anulan las derivadas parciales de E respecto de a y respecto de b:

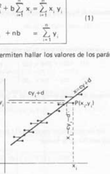
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{n} (2ax_i^2 - 2x_i\,y_i + 2bx_i) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= \sum_{i=1}^{n} (2b - 2y_i + 2ax_i) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned}} \qquad (1)$$

Estas ecuaciones, que se llaman *ecuaciones normales*, nos permiten hallar los valores de los parámetros a y b.

Se llama **recta de regresión de x sobre y**, la recta de ecuación

$$x = cy + d$$

que mejor se ajusta a la nube de puntos correspondiente a los valores $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.



Se llama residuo correspondiente a la observación (x_i, y_i) al valor

$$x_i - (cy_i + d) = x_i - cy_i - d$$

Las ecuaciones normales de la recta de regresión de x sobre y se obtienen de las ecuaciones (1) cambiando a por c, b por d, x_i por y_i e y_i por x_i:

$$\boxed{\begin{aligned} c\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + d\sum_{i=1}^{n} y_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i \\ c\sum_{i=1}^{n} y_i + nd &= \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}} \qquad (2)$$

Ambas rectas de regresión pasan por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

Calcula la ecuación de la recta de regresión mínimo cuadrática de y sobre x, y la ecuación de la recta de regresión de x sobre y en la distribución siguiente:

x	2	4	6	8	10
y	10	7	5	3	0

(Univ. de Granada)

Sean $y = ax + b$, $x = cx + d$ las ecuaciones pedidas.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
2	10	4	20	100
4	7	16	28	49
6	5	36	30	25
8	3	64	24	9
10	0	100	0	0
30	25	220	102	183

Las ecuaciones normales de la recta de regresión de y sobre x son:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & 220a + 30b = 102 \\ (2) & 30a + 5b = 25\end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{ll}(1') = (1) - 6(2) & 40a = -48 \\ (2) & 30a + 5b = 25\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -\frac{48}{40} = -\frac{6}{5} \\ b = \frac{61}{5}\end{array}$$

La ecuación de la recta de regresión de y sobre x es:

$$\boxed{y = -\frac{6}{5}x + \frac{61}{5}}$$

Las ecuaciones normales de la recta de regresión de x sobre y son:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & 183c + 25d = 102 \\ (2) & 25c + 5d = 30\end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{ll}(1') = (1) - 5(2) & 58c = -48 \\ (2) & 25c + 5d = 30\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c = -\frac{48}{58} = -\frac{24}{29} \\ d = \frac{294}{29}\end{array}$$

La ecuación de la recta de regresión de x sobre y es:

$$\boxed{x = -\frac{24}{29}y + \frac{294}{29}}$$

De las ecuaciones normales (1) se obtiene que la ecuación de la recta de regresión de y sobre x se puede escribir de la forma:

$$\boxed{y - \bar{y} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\bar{x})^2}(x - \bar{x})}$$

y de las ecuaciones normales (2) se obtiene que la recta de regresión de x sobre y se puede escribir de la forma:

$$\boxed{x - \bar{x} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - (\bar{y})^2}(y - \bar{y})}$$

Covarianza. Se llama así a la expresión: $\boxed{\operatorname{cov}(x,y) = s_{xy} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y}}$

Considerando que $\boxed{s_x^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\overline{x})^2}$ y $\boxed{s_y^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - (\overline{y})^2}$

las rectas de regresión de y sobre x, y de x sobre y se pueden escribir de la forma:

$$\boxed{y - \overline{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - \overline{x})} \quad ; \quad \boxed{x - \overline{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2}(y - \overline{y})}$$

Se observaron las edades de cinco niños y sus pesos respectivos, obteniéndose los siguientes resultados:

Edad, en años (x)	2	4'5	6	7'2	8
Peso, en kg (y)	15	19	25	33	34

a) Hallar las rectas de regresión de Y sobre X, y de X sobre Y.
b) ¿Qué peso corresponderá a un niño de 5 años? ¿Qué edad corresponderá a un peso de 36kg?

(Univ. del País Vasco, 1991)

a)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
2	15	4	225	30
4'5	19	20'25	361	85'5
6	25	36	625	150
7'2	33	51'84	1089	237'6
8	34	64	1156	272
27'7	126	176'09	3456	775'1

$\overline{x} = \dfrac{27'7}{5} = 5'54 \quad ; \quad \overline{y} = \dfrac{126}{5} = 25'2$

$s_x^2 = \dfrac{176'09}{5} - (5'54)^2 = 35'218 - 30'692 = 4'526$

$s_y^2 = \dfrac{3456}{5} - (25'2)^2 = 691'2 - 635'04 = 56'16$

$s_{xy} = \dfrac{775'1}{5} - (5'54)(25'2) = 155'02 - 139'608 = 15'412$

Recta de regresión de Y sobre X: $y - 25'2 = \dfrac{15'412}{4'526}(x - 5'54) \Rightarrow \boxed{y = 3'41\,x + 6'31}$

Recta de regresión de X sobre Y: $x - 5'54 = \dfrac{15'412}{56'16}(y - 25'2) \Rightarrow \boxed{x = 0'27\,y - 1'26}$

b) Haciendo $x = 5$ en la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X:

$y = 3'41 \cdot 5 + 6'31 = 23'36 \Rightarrow$ a un niño de 5 años corresponderá un peso de $\underline{23'36}$ kg.

Haciendo $y = 36$ en la ecuación de la recta de regresión de X sobre Y:

$x = 0'27 \cdot 36 - 1'26 = 8'46 \Rightarrow$ a un niño de peso 36 kg. corresponderá una edad de $\underline{8'46}$ años.

Si los valores x_i e y_i son grandes, se puede hacer los cambios:

$$x_i' = x_i - A \quad ; \quad y_i' = y_i - B$$

siendo A y B constantes elegidas arbitrariamente.

Se tiene: $s_x = s_{x'} \quad ; \quad s_y = s_{y'} \quad ; \quad s_{xy} = s_{x'y'}$

Se han medido los pesos y tallas de 5 personas, obteniendose los siguientes datos:

Peso (x)	50 kg	55 kg	55 kg	60 kg	60 kg
Talla (y)	150 cm.	160 cm	170 cm	180 cm	190 cm

Calcular la recta de regresión de y (talla) sobre x (peso). ¿Cuál es la talla esperada para una persona que pese 62 kg?

(Univ. de Zaragoza, 1991)

x_i	y_i	$x'_i = x_i - 55$	$y'_i = y_i - 170$	$x_i'^2$	$y_i'^2$	$x'_i \cdot y'_i$
50	150	−5	−20	25	400	100
55	160	0	−10	0	100	0
$\boxed{55}$	$\boxed{170}$	0	0	0	0	0
60	180	5	10	25	100	50
60	190	5	20	25	400	100
		5	0	75	1000	250

$\bar{x} = 55 + \frac{5}{5} = 56$; $\quad x' = \frac{5}{5} = 1$

$\bar{y} = 170 + \frac{0}{5} = 170$; $\quad y' = \frac{0}{5} = 0$

$\mathrm{cov}(x,y) = \mathrm{cov}(x',y') = \frac{250}{5} - 1 \cdot 0 = 50$

$s_x^2 = s_{x'}^2 = \frac{75}{5} - 1^2 = 14$

La recta de regresión de y sobre x es: $y - 170 = \frac{50}{14}(x - 56) \Rightarrow \boxed{y = 3{,}57x - 30}$

Para $x = 62$: $\quad y = 3{,}57 \cdot 62 - 30 = \boxed{191{,}34}$ cm.

El coeficiente angular de la primera recta, $\frac{s_{xy}}{s_x^2}$, se llama *coeficiente de regresión de y sobre x*, y $\frac{s_{xy}}{s_y^2}$ se llama *coeficiente de regresión de x sobre y.*

Coeficiente de correlación lineal de las variables x e y, es igual a

$$\boxed{r = \frac{s_{xy}}{s_y \, s_y}}$$

Si la ecuación de la recta de regresión de y sobre x es: $y = ax + b$, y la ecuación de la recta de regresión de x sobre y es: $x = cy + d$, el coeficiente de correlación lineal r de las variables x e y es tal que

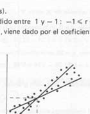
$$\boxed{r^2 = a \cdot c}$$

siendo el signo de r igual al signo de a y c (que serán iguales).

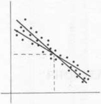
El valor de coeficiente de correlación lineal está comprendido entre 1 y −1: $-1 \leq r \leq 1$.

El grado de dependencia lineal entre las dos variables x, y, viene dado por el coeficiente de correlación lineal.

$1 > r > 0 \Rightarrow$ correlación directa o positiva
$(a > 0,\ c > 0)$

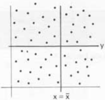


$-1 < r < 0 \Rightarrow$ correlación inversa o negativa
$(a < 0, c < 0)$

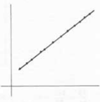


$r = 0 \Rightarrow$ no existe correlación y las variables se llaman incorreladas.
Las ecuaciones de las rectas son

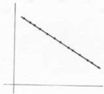
$$y = \bar{y} \quad ; \quad x = \bar{x}$$



$r = 1 \Rightarrow$ correlación directa perfecta, las dos rectas son coincidentes.



$r = -1 \Rightarrow$ correlación inversa perfecta, las dos rectas son coincidentes.



$|r| > 0,8 \Rightarrow$ la correlación entre ambas variables es grande.
$|r| \approx 0,5 \Rightarrow$ la correlación es moderada.
$|r| < 0,3 \Rightarrow$ la correlación es pequeña.

PROBLEMAS

13.1 Cinco niñas de 2, 3, 5, 7 y 8 años de edad pesan, respectivamente, 14, 20, 30, 42 y 44 kilos.

a) Hallar la ecuación de la recta de regresión del peso sobre la edad.

b) ¿Cuál sería el peso aproximado de una niña de 6 años?

(Univ. de León)

a) Sea $y = ax + b$ la recta pedida:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
2	14	4	28
3	20	9	60
5	30	25	150
7	42	49	294
8	44	64	352
25	150	151	884

Ecuaciones normales:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 151a + 25b = 884 \\ (2)\ \ 25a + 5b = 150\end{array}\right| \quad \begin{array}{l}(1') = (1) - 5(2) \\ (2)\end{array} \quad \left.\begin{array}{r}26a \quad = 134 \\ 25a + 5b = 150\end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = \frac{134}{26} = \frac{67}{13} \qquad b = \frac{55}{13}$$

$$\boxed{y = \frac{67}{13}x + \frac{55}{13}}$$

b) Para $x = 6$: $y = \frac{67}{13} \cdot 6 + \frac{55}{13} = 35{,}15 \approx \boxed{35 \text{ kilos}}$

13.2 En una empresa se seleccionaron cinco trabajadores, se anotaron sus años de servicio y el tiempo de permiso en horas solicitado el último mes. Los resultados obtenidos fueron:

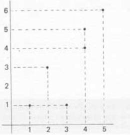
x:	1	3	2	4	5	4
y:	1	1	3	4	6	5

1) Representar gráficamente los datos anteriores. Razonar si los datos muestran correlación positiva o negativa.

2) Calcular el coeficiente de correlación e interpretarlo en términos de la situación real.

(Univ. de Madrid, 1991)

1) Sobre un sistema de referencia ortonormal se representan los puntos (1,1), (3,1), (2,3), (4,4), (5,6), (4,5):



En general, al aumentar el valor de x aumenta el valor de y, la correlación es positiva.

2)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	1	1	1
3	1	9	1	3
2	3	4	9	6
4	4	16	16	16
5	6	25	36	30
4	5	16	25	20
19	20	71	88	76

$$\bar{x} = \frac{19}{6} \;; \qquad \bar{y} = \frac{20}{6}$$

$$r = \frac{\frac{76}{6} - \frac{19}{6} \cdot \frac{20}{6}}{\sqrt{\frac{71}{6} - \left(\frac{19}{6}\right)^2} \sqrt{\frac{88}{6} - \left(\frac{20}{6}\right)^2}} = \frac{2{,}11}{\sqrt{1{,}80}\sqrt{3{,}56}} = \frac{2{,}11}{3{,}34 \cdot 1{,}89} = \boxed{0{,}83}$$

Existe una alta correlación positiva entre los valores de x e y.

13.3 Considera la serie estadística bidimensional

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1

Calcula el coeficiente de correlación, indica qué significa el valor obtenido y calcula las dos rectas de regresión.

(Univ. de Valencia, 1992)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	1

$$\bar{x} = \frac{2}{4} = 0{,}5 \;; \quad \bar{y} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

$$r = \frac{\text{cov}(x,y)}{s_x \cdot s_y} = \frac{\frac{1}{4} - (0{,}5)(0{,}5)}{\sqrt{\frac{2}{4} - (0{,}5)^2}\sqrt{\frac{2}{4} - (0{,}5)^2}} = \frac{0}{0{,}25} = 0$$

$r = 0 \Rightarrow$ no existe correlación lineal entre ambas variables, éstas son incorreladas.

Las ecuaciones de las rectas de regresión de y sobre x y x sobre y son:

$$y-\bar{y}=\frac{\text{cov}\,(x,y)}{s_x^2}(x-\bar{x}) \Rightarrow \boxed{y-0{,}5=0} \ ; \ x-\bar{x}=\frac{\text{cov.}\,(x,y)}{s_y^2}(y-\bar{y}) \Rightarrow \boxed{x-0{,}5=0}$$

13.4 La tabla adjunta da el índice de mortalidad y de una muestra de población en función del consumo diario x de cigarrillos:

Número de cigarrillos	x	3	5	6	15	20	40	45
Indice de mortalidad	y	0,2	0,3	0,3	0,5	0,7	1,4	1,5

Determinar el coeficiente de correlación entre x e y. Predecir el índice de mortalidad para un consumidor de 60 cigarrillos diarios.

(Univ. de Valencia, 1992)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
3	0,2	9	0,04	0,6
5	0,3	25	0,09	1,5
6	0,3	36	0,09	1,8
15	0,5	225	0,25	7,5
20	0,7	400	0,49	14
40	1,4	1600	1,96	56
45	1,5	2025	2,25	67,5
134	4,9	4320	5,17	148,9

$$\bar{x}=\frac{134}{7}=19{,}14 \ ; \ \bar{y}=\frac{4{,}9}{7}=0{,}7$$

$$r=\frac{\dfrac{148{,}9}{7}-(19{,}14)(0{,}7)}{\sqrt{\dfrac{4320}{7}-(19{,}14)^2}\ \sqrt{\dfrac{5{,}17}{7}-(0{,}7)^2}}=$$

$$=\frac{7{,}873}{\sqrt{250{,}80}\,\sqrt{0{,}25}}=\boxed{0{,}994}$$

La recta de regresión de y sobre x es:

$$y-0{,}7=\frac{7{,}873}{250{,}80}(x-19{,}14) \Rightarrow y=0{,}0314\,x+0{,}0990$$

haciendo $x=60$: $y=0{,}0314\cdot 60+0{,}0990=1{,}983\approx\boxed{2}$

13.5 La media de los pesos de una población es de 65 kg y la de sus alturas 170 cm, mientras que las desviaciones típicas son de 5 kg y 10 cm respectivamente y la covarianza de ambas variables es 40. Calcular la recta de regresión de los pesos respecto de las estaturas.

¿Cuánto estima que pesará un individuo de 180 cm de estatura?

(Univ. de Barcelona, 1991)

Sea y el peso, x la estatura, $\bar{y}=65$, $\bar{x}=170$, $s_y=5$; $s_x=10$, $\text{cov}\,(x,y)=40$.

La recta de regresión de y sobre x tiene por ecuación:

$$y-\bar{y}=\frac{\text{cov}\,(x,y)}{s_x^2}(x-\bar{x}) \Rightarrow y-65=\frac{40}{100}(x-170) \Rightarrow \boxed{y=0{,}4x-3}$$

Para $x=180$: $y=0{,}4\cdot 180-3=\boxed{69}$ kg, peso estimado para un individuo de 180 cm de estatura.

13.6 La siguiente tabla ofrece los resultados de seis pares de observaciones, realizadas para analizar el grado de relación existente entre dos variables X e Y:

X	2	2	3	3	3	4
Y	0	1	1	2	4	3

Obtener:

a) Recta de regresión de Y sobre X.
b) Representación gráfica de la misma, así como de los pares de observaciones anteriores.
c) ¿Qué grado de relación lineal existe entre ambas variables?

(Univ. de Cadiz, 1991)

a)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
2	0	4	0	0
2	1	4	1	2
3	1	9	1	3
3	2	9	4	6
3	4	9	16	12
4	3	16	9	12
17	11	51	31	35

$$\bar{x} = \frac{17}{6} = 2{,}83 \; ; \qquad \bar{y} = \frac{11}{6} = 1{,}83$$

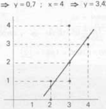
$$s_x^2 = \frac{51}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = 0{,}47 \; ; \quad s_y^2 = \frac{31}{6} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 = 1{,}81$$

$$\text{cov}\,(x,y) = s_{xy} = \frac{35}{6} - \frac{17}{6}\,\frac{11}{6} = 0{,}64$$

$$y - 1{,}83 = \frac{0{,}64}{0{,}47}\,(x - 2{,}83) \;\Rightarrow\; \boxed{y = 1{,}36x - 2{,}02}$$

b) Representación gráfica de la recta de regresión de Y sobre X:

$$y = 1{,}36x - 2{,}02 : \; x = 2 \;\Rightarrow\; y = 0{,}7 \; ; \; x = 4 \;\Rightarrow\; y = 3{,}42$$



c) El grado de relación lineal viene dado por el coeficiente de correlación lineal:

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{0{,}64}{\sqrt{0{,}47}\,\sqrt{1{,}81}} = \frac{0{,}64}{0{,}69 \cdot 1{,}34} = 0{,}69$$

el grado de relación lineal es moderadamente alto y positivo.

13.7 En una empresa se seleccionaron cinco trabajadores, se anotaron sus años de servicio y el tiempo de permiso en horas solicitado el último mes. Los resultados obtenidos fueron:

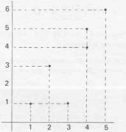
x:	1	3	2	4	5	4
y:	1	1	3	4	6	5

a) Representar gráficamente los datos anteriores. Razonar si los datos muestran correlación positiva o negativa.

b) Calcular el coeficiente de correlación e interpretarlo en términos de la situación real.

(Univ. de Madrid, 1992)

a) En un sistema de referencia ortonormal se representan los puntos (1,1), (3,1), (2,3), (4,4), (5, 6) y (4,5), obteniendo la nube de puntos o diagrama de dispersión:



En general, al aumentar la x aumenta la y, la correlación es positiva.

b)

x	y	x^2	y^2	x y
1	1	1	1	1
3	1	9	1	3
2	3	4	9	6
4	4	16	16	16
5	6	25	36	30
4	5	16	25	20
19	20	71	88	76

$$\bar{x} = \frac{19}{6}\ ;\ \bar{y} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

$$r = \frac{\frac{76}{6} - \frac{19}{6}\cdot\frac{10}{3}}{\sqrt{\frac{71}{6} - \left(\frac{19}{6}\right)^2}\sqrt{\frac{88}{6} - \left(\frac{10}{3}\right)^2}} = \frac{2{,}11}{\sqrt{1{,}80}\sqrt{3{,}56}} = \frac{2{,}11}{1{,}34\cdot 1{,}87} = \boxed{0{,}84}$$

Al ser r positivo y próximo a 1, existe una fuerte correlación lineal positiva entre los valores de x e y.

13.8 Una compañía de seguros considera que el número de vehículos (Y) que circulan por una autopista Vasco-Aragonesa puede ponerse en función del número de accidentes (X) que ocurren en ella.

Durante cinco días obtuvo los siguientes resultados:

X	5	7	2	1	9
Y	15	18	10	8	20

a) Calcula el coeficiente de correlación lineal.

b) Si ayer se produjeron 6 accidentes, ¿cuantos vehículos podemos suponer que circulaban por la autopista?

c) ¿Es buena esta predicción?

(Univ. de Zaragoza, 1991)

a)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x\cdot y_i$
5	15	25	225	75
7	18	49	324	126
2	10	4	100	20
1	8	1	64	8
9	20	81	400	180
24	71	160	1113	409

$$\bar{x} = \frac{24}{5} = 4{,}8\ ;\ \bar{y} = \frac{71}{5} = 14{,}2$$

$$r = \frac{\frac{409}{5} - (4{,}8)(14{,}2)}{\sqrt{\frac{160}{5} - (4{,}8)^2}\sqrt{\frac{1113}{5} - (14{,}2)^2}} =$$

$$= \frac{81{,}8 - 68{,}16}{\sqrt{32 - 23{,}04}\ \sqrt{222{,}6 - 201{,}64}} =$$

$$= \frac{13,64}{2,99 \cdot 4,58} = \boxed{0,996}$$

b) La ecuación de la recta de regresión de y sobre x es:

$$y - 14,2 = \frac{13,64}{(2,99)^2}(x - 4,8) \ ; \qquad y - 14,2 = 1,53\,(x - 4,8) \ ; \qquad y = 1,53x + 6,86$$

Para $x = 6$: $y = 1,53 \cdot 6 + 6,86 = 16,04 \approx \boxed{16}$ $\Rightarrow$ podemos suponer que ayer circulaban 16 vehículos por la autopista.

c) Al ser el coeficiente de correlación lineal muy próximo a 1, existe una correlación lineal casi perfecta, la predicción hecha en el apartado anterior es buena.

13.9 Calcula la recta de regresión correspondiente a la distribución siguiente:

Altura sobre el nivel del mar	0	184	231	481	730	911	1550
Presión atmosférica	760	745	740	720	700	685	650

¿Qué presión atmosférica habría sobre Peña Vieja (2 600 metros de altitud aproximadamente)?

(Univ. de Cantabria, 1991)

x_i	y_i	$x'_i = x_i - 730$	$y'_i = y_i - 720$	x'^2_i	$x'_i \cdot y'_i$
0	760	− 730	40	532 900	− 29 200
184	745	− 546	25	298 116	− 13 650
231	740	− 499	20	249 001	− 9980
481	$\boxed{720}$	− 249	0	62 001	0
$\boxed{730}$	700	0	− 20	0	0
911	685	181	− 35	32 761	− 6335
1550	650	820	− 70	672 400	− 57 400
		− 1023	− 40	1 847 179	− 116 565

$$\bar{x} = 730 - \frac{1023}{7} = 583,86 \ ; \qquad \bar{y} = 720 - \frac{40}{7} = 714,29$$

$$s_{xy} = s_{x'y'} = \frac{-116565}{7} - \frac{-1023}{7}\,\frac{-40}{7} = -16652,142 - 835,10 = -17487,242$$

$$s_x^2 = s_{x'}^2 = \frac{1847179}{7} - \left(\frac{-1023}{7}\right)^2 = 242525$$

La ecuación de la recta de regresión de y sobre x es:

$$y - 714,29 = \frac{-17487,242}{242525}\,(x - 583,86) \ \Rightarrow \ \boxed{y = -0,072\,x + 756,39}$$

Presión atmosférica en Peña Vieja:

$$y = -0,072 \cdot 2600 + 756,39 = \boxed{569}$$

13.10 Para realizar unos estudios sobre energía solar se han medido la temperatura máxima y el número de horas de sol durante una semana, obteniéndose los siguientes resultados:

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Temp.	12	14	7	10	15	20	18
nº horas	12,35	12,36	12,16	12,36	12,38	12,45	12,40

a) Hallar las temperaturas mediana y modal máximas diarias.
b) Hallar la recta de regresión de la temperatura en función del número de horas de sol.
c) El lunes siguiente a la realización de la experiencia se rompió el medidor del número de horas de sol. ¿Podemos estimar este número a partir de la función obtenida en el apartado anterior? Justificar la respuesta y obtener esta estimación si sabemos que la temperatura máxima fue de 19 grados centígrados.

(Univ. de Córdoba)

a) Ordenadas las temperaturas en orden creciente:

7, 10, 12, 14, 15, 18, 20

la temperatura mediana nos la da el valor central: $\boxed{14}$

No se repite ningún número, no hay temperatura modal.

b) Si X es la variable que mide la temperatura e Y la variable que mide las horas de sol, tenemos que hallar la recta de regresión de X sobre Y.

x_i	y_i	$x'_i = x_i - 14$	$y' = y_1 - 12,36$	$x_i'^2$	$y_i'^2$	$x'_i \cdot y'_i$
7	12,16	−7	−0,20	49	0,04	1,4
10	12,36	−4	0	16	0	0
12	12,35	−2	−0,01	4	0,0001	0,02
$\boxed{14}$	$\boxed{12,36}$	0	0	0	0	0
15	12,38	1	0,02	1	0,0004	0,02
18	12,40	4	0,04	16	0,0016	0,16
20	12,45	6	0,09	36	0,0081	0,54
		−2	−0,06	122	0,0502	2,14

$$\bar{x} = 14 + \frac{-2}{7} = 13,71 \; ; \; \bar{y} = 12,36 + \frac{-0,06}{7} = 12,35$$

$$\bar{x}' = \frac{-2}{7} = -0,2857 \; ; \; \bar{y}' = \frac{-0,06}{7} = \frac{-0,06}{7} = -0,0086$$

$$x - 13,71 = \frac{\frac{2,14}{7} - (-0,2857)(-0,0086)}{\frac{0,0502}{7} - (-0,0086)^2}(y - 12,35) \Rightarrow$$

$$x - 13,71 = 42,73\,(y - 12,35) \Rightarrow \boxed{x = 42,73\,y - 514}$$

c) Tenemos que hallar el coeficiente de correlación:

$$r = \frac{\frac{2,14}{7} - (-0,2857)(-0,0086)}{\sqrt{\frac{122}{7} - (-0,2857)^2}\,\sqrt{\frac{0,0502}{7} - (-0,0086)^2}} = 0,86$$

Al ser el coeficiente de correlación lineal próximo a 1, existe una fuerte relación lineal entre los valores de x e y, luego se puede estimar las horas de sol a partir de la ecuación obtenida:

$$\text{para } x = 19: \quad 19 = 42{,}73 \cdot y - 514 \Rightarrow y = \frac{19+514}{42{,}73} = \boxed{12{,}47} \text{ horas de sol}$$

13.11 La siguiente tabla representa los pesos y alturas de 20 alumnos de C.O.U.:

Nº de alumnos	4	3	2	5	4	2
Peso	73	76	73	78	80	82
Altura	1,64	1,68	1,70	1,72	1,76	1,80

Se pide:

a) ¿Cómo están correlacionados estos datos?

b) ¿Cuál será la altura estimada para un alumno de este colectivo que pese 75 kg?

(Univ. de La Laguna–Tenerife)

x_i	y_i	n_i	$x'_i = x_i - 78$	$y'_i = y_i - 1{,}72$	$n_i \cdot x'_i$	$n_i \cdot y'_i$	$n \cdot x'^2_i$	$n \cdot y'^2_i$	$n_i \cdot x'_i\, y'_i$
73	1,65	4	−5	−0,07	−20	−0,28	100	0,0196	1,4
76	1,68	3	−2	−0,04	−6	−0,12	12	0,0048	0,24
73	1,70	2	−5	−0,02	−10	−0,04	50	0,0008	0,20
$\boxed{78}$	$\boxed{1{,}72}$	5	0	0	0	0	0	0	0
80	1,76	4	2	0,04	8	0,16	16	0,0064	0,32
82	1,80	2	4	0,08	8	0,16	32	0,0128	0,64
		20			−20	−0,12	210	0,0444	2,80

$$\bar{x} = 78 + \frac{-20}{20} = 77\,; \quad \bar{y} = 1{,}72 + \frac{-0{,}12}{20} = 1{,}714\,; \quad \bar{x}' = \frac{-20}{20} = -1\,; \quad \bar{y}' = \frac{-0{,}12}{20} = -0{,}006$$

$$r = \frac{\dfrac{2{,}80}{20} - (-1)\,(-0{,}006)}{\sqrt{\dfrac{210}{20} - (-1)^2}\,\sqrt{\dfrac{0{,}0444}{20} - (-0{,}006)^2}} = \frac{0{,}134}{\sqrt{9{,}5}\,\sqrt{0{,}002184}} = \frac{0{,}134}{3{,}0822 \cdot 0{,}0467} = \boxed{0{,}9310}$$

r positivo y próximo a 1 implica que existe una correlación lineal directa y grande entre ambas variables.

b) La ecuación de la recta de regresión de y sobre x es:

$$y - 1{,}714 = \frac{0{,}134}{9{,}5}\,(x - 77) \Rightarrow y = 0{,}0141\,x + 0{,}62\,79$$

para $x = 75$: $y = 0{,}0141 \cdot 75 + 0{,}6279 = 1{,}6854 \approx \boxed{1{,}69}$ m.

13.12 Se sabe que entre el consumo de papel y el número de litros de agua por metro cuadrado que se recogen en una ciudad, no existe relación. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de la covarianza de estas variables?

b) ¿Cuánto vale el coeficiente de correlación lineal?

c) ¿Qué ecuaciones tienen las dos rectas de regresión y cuál es su posición en el plano?

(Univ. de Oviedo)

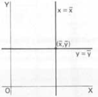
a) $\text{cov.}\,(x,y) = 0$

b) Al ser $s_x \neq 0$ y $s_y \neq 0$: $r = \dfrac{\text{cov.}\,(x,y)}{s_x \cdot s_y} = 0$

c) Ecuación de la recta de regresión de y sobre x: $y - \bar{y} = 0$

" " " " " " " x " y: $x - \bar{x} = 0$

Las dos rectas de regresiòn pasan por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, y son perpendiculares.



13.13 De la siguiente distribución bidimensional:

Y \ X	(0,1)	(1,2)	(2,3)	(3,4)	(4,5)	(5,6)	(6,7)
(1,2)	2	2	1	–	–	–	–
(2,3)	–	1	2	4	1	1	–
(3,4)	–	–	–	–	1	2	3

Obtener:

a) Recta de regresión de Y sobre X.

b) Coeficiente de correlación lineal e interpretar el resultado.

(Univ. de Castilla–La Mancha, junio 1991)

a) Considerando las marcas de clase de cada intervalo, el cuadro anterior lo podemos reducir a las tres primeras columnas del siguiente cuadro:

x_i	y_i	n_i	$n_i x_i$	$n_i y_i$	$n_i x_i^2$	$n_i y_i^2$	$n_i x_i y_i$
0,5	1,5	2	1	3	0,5	4,5	1,5
1,5	1,5	2	3	3	4,5	4,5	4,5
1,5	2,5	1	1,5	2,5	2,25	6,25	3,75
2,5	1,5	1	2,5	1,5	6,25	2,25	3,75
2,5	2,5	2	5	5	12,5	12,5	12,50
3,5	2,5	4	14	10	49	25	35
4,5	2,5	1	4,5	2,5	20,25	6,25	11,25
4,5	3,5	1	4,5	3,5	20,25	12,25	15,75
5,5	2,5	1	5,5	2,5	30,25	6,25	13,75
5,5	3,5	2	11	7	60,5	24,5	38,5
6,5	3,5	3	19,5	10,5	126,75	36,75	68,25
		20	72	51	333	141	208,5

$$\overline{x} = \frac{72}{20} = 3{,}6 \ ; \quad \overline{y} = \frac{51}{20} = 2{,}55 \ ; \quad y - 2{,}55 = \frac{\dfrac{208{,}5}{20} - (3{,}6)(2{,}55)}{\dfrac{333}{20} - (3{,}6)^2}(x - 3{,}6) \ \Rightarrow$$

$$y - 2{,}55 = 0{,}34\,(x - 3{,}6) \ \Rightarrow \ \boxed{y = 0{,}34\,x + 1{,}33}$$

$$r = \frac{\dfrac{208{,}5}{20} - (3{,}6)(2{,}55)}{\sqrt{\dfrac{333}{20} - (3{,}6)^2}\ \sqrt{\dfrac{141}{20} - (2{,}55)^2}} = \boxed{0{,}88}$$

El ser r positivo y próximo a 1 nos dice que existe una correlación lineal positiva o directa entre las dos variables (al aumentar la x aumenta la y), siendo alta la relación de dependencia de ambas variables.

13.14 Dos conjuntos de datos bidimensionales tienen como coeficiente de correlación $r_1 = -0'83$ y $r_2 = 0'51$.

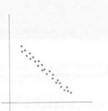
1) Representar gráficamente dos conjuntos de puntos cuyas correlaciones reflejen aproximadamente las dadas.
2) Razonar cuál de los dos conjuntos estará más concentrado respecto a sus correspondientes rectas de regresión.

(Univ. de Madrid, 1991)

1) Si la recta de regresión de y sobre x de una serie de datos es $y = ax + b$, y la de x sobre y es $x = cy + d$, el coeficiente de correlación r es tal que $r^2 = ac$, teniendo r el mismo signo que a y c.

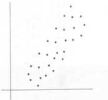
$r_1 = -0{,}83 < 0 \ \Rightarrow$ la correlación es inversa o negativa, al aumentar la x disminuye la y.

$r_1 = -0{,}83$, próximo a -1, la correlación es fuerte, la nube de puntos estará en una franja estrecha



$r_2 = 0{,}51 > 0 \ \Rightarrow$ la correlación es directa o positiva, al aumentar el valor de x aumenta el valor de y.

$r_2 = 0{,}51$, no próximo a 1, la correlación no es fuerte, la nube de puntos estará en una franja más ancha



2) Al ser $|r_1| > |r_2|$, el primer conjunto estará más concentrado respecto a sus correspondientes rectas de regresión.

13.15 **Considérense las siguientes nubes de puntos:**

1) **Asociar razonadamente las siguientes rectas de regresión de y sobre x a cada una de las gráficas:** $x + y = 4$, $0{\cdot}3x + y = 2{,}6$, $0{\cdot}5x - y = 1$.

2) **Razonar en cuál de las gráficas la recta de regresión permitiría predicciones más precisas.**

(Univ. de Madrid, 1991)

$$y = -x + 4 \ ; \ y = -0{,}3x + 2{,}6 \ ; \ y = 0{,}5x - 1$$

La recta de regresión de la gráfica 1 será casi horizontal y descendente, su coeficiente angular será negativo y próximo a 0, siendo su ordenada en el origen positiva.

La recta de regresión de la gráfica 2 será creciente, su coeficiente angular será positivo, pero menor que 1.

La recta de regresión de la gráfica 3 será decreciente, su coeficiente angular será negativo, próximo a -1, siendo positiva su ordenada en el origen.

De lo anterior resulta:

- la gráfica 1 se corresponde con la recta $y = -0{,}3x + 2{,}6$
- la gráfica 2 se corresponde con la recta $y = 0{,}5x - 1$
- la gráfica 3 se corresponde con la recta $y = -x + 4$

Los puntos de la nube de puntos de la gráfica 3 parece ser que son los que mejor se adaptan a una recta, su recta de regresión permitirá predicciones más precisas.

13.16 Un conjunto de datos bidimensionales (x_i, y_i) tiene coeficiente de correlación $r = 0{,}8$ y las medias de las distribuciones marginales son $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 10$. Sin efectuar cálculos, razonar por qué las siguientes ecuaciones no pueden corresponder a la recta de regrsión de y sobre x: $y = -2x + 16$, $y = 1{,}5x + 1$, $y = -3{,}5x - 1$.

(Univ. dr Madrid, 1991)

Consideraremos las siguientes propiedades:

– si las rectas de regresión de y sobre x, y de x sobre y son:

$$y = ax + b \ ; \ x = cx + d$$

y r es el coeficiente de correlación, se verifica que a, c y r tienen el mismo signo.

– ambas rectas de regresión pasan por el punto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$.

Las ecuaciones $y = -2x + 16$, $y = -3{,}5x - 1$, no pueden corresponder a la recta de regresión de y sobre x porque el coeficiente angular de estas rectas es negativo y r es positivo.

El punto $(\bar{x}, \bar{y}) = (3, 10)$ no satisface la ecuación de la recta $y = 1{,}5x + 1$, ya que $10 \neq 1{,}5 \cdot 3 + 1$, luego esta recta tampoco es recta de regresión.

13.17 ¿Qué significa en una distribución bidimensional que el coeficiente de correlación lineal es

a) $\rho = 1$; b) $\rho = -1$; c) $\rho = 0{,}75$?

(Univ. de Santiago)

a) $\rho = 1 \Rightarrow$ la correlación es directa (al aumentar la x aumenta la y) y perfecta, las dos rectas de regresión coinciden, existe una relación funcional entre ambas variables.

b) $\rho = -1 \Rightarrow$ la correlación es inversa (al aumentar la x disminuye la y) y perfecta, las dos rectas de regresión coinciden, existe una relación funcional entre ambas variables.

c) $\rho = 0{,}75 \Rightarrow$ la correlación es directa, las dos rectas de regresión son distintas, siendo la relación entre ambas variables moderadamente alta.

CAPITULO 14

PROBABILIDADES

EXPERIMENTOS ALEATORIOS son los que repetidos en condiciones idénticas dan, frecuentemente, resultados diferentes, y por tanto, no es posible predecir el resultado de una experiencia particular.

Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son todos los resultados posibles del experimento, al conjunto

$$\Omega = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$$

se le llama *conjunto universal* o *espacio muestral*, y a los elementos r_i que constituyen Ω se les llama *sucesos elementales* o *resultados*. En cada prueba se obtendrá un resultado.

El espacio muestral del experimento de lanzar un dado al aire y leer el número de la cara superior es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Antes de hacer una prueba en un experimento aleatorio no puede predeterminarse el resultado, pero sí sabemos con certeza que será alguno de los elementos del espacio muestral Ω.

Fenómenos *estocásticos* o *aleatorios* son los que con las mismas causas pueden dar lugar a resultados diferentes.

El lanzamiento de un dado y lectura del número de su cara superior.

Fenómenos *determinísticos* son los que con las mismas causas dan siempre los mismos resultados.

El tiempo empleado por un móvil en recorrer la distancia d a la velocidad constante v será siempre el mismo.

Suceso de un experimento aleatorio es todo subconjunto del espacio muestral. Los sucesos se simbolizan por A, B, C, ...

El suceso A está bien definido si se ha establecido un criterio lógico que nos permite afirmar que el resultado r_i verifica o no al suceso A.

El suceso "obtener un número par al lanzar un dado" es $A = \{2, 4, 6\}$. Diremos que se ha realizado el suceso A si como resultado de un único lanzamiento se ha presentado el 2, o el 4 o el 6.

Los sucesos elementales son los subconjuntos unitarios de Ω.

Suceso seguro es el que se verifica por todos los resultados del experimento. Se simboliza por Ω.

El suceso de obtener, al lanzar un dado, un número igual o menor que 6 es: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.

Suceso imposible es el que no se verifica por ninguno de los resultados posibles del experimento. Se simboliza por ϕ.

El suceso de obtener, al lanzar un dado, un número superior a 6 es el suceso imposible.

Suceso contrario u **opuesto** de A es aquél que se verifica por todos los resultados que no verifican A. Se simboliza por $\overline{A}$ o por A^c.

Realización de $\overline{A} \Leftrightarrow$ no realización de A.

El suceso contrario del suceso "obtener un número par al lanzar un dado" es: $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, ya que $A = \{2, 4, 6\}$ y $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Sucesos idénticos o equivalentes: Si el suceso B es verificado por los mismos resultados que verifican al suceso A y sólo por éstos, se dice que los sucesos A y B son identicos. Se escribe $A = B$. Los sucesos elementales de A y B son los mismos.

El suceso $B = \{1, 2, 3, 5\}$ es idéntico al suceso A: "obtener un número primo al lanzar un dado".

El suceso A implica al suceso B si todos los resultados que verifican A verifican tambien B. Se simboliza por: $A \Rightarrow B$ o $A \subset B$.

Sea el suceso A "obtener un número impar al lanzar un dado" y B el suceso "obtener un número primo":

$$A = \{1, 3, 5\} \; ; \quad B = \{1, 2, 3, 5\} \; ; \quad A \Rightarrow B$$

Siempre que se realiza A se realiza B.

Sucesos incompatibles o excluyentes. Los sucesos A y B son incompatibles si su realización simultánea es imposible.

El suceso A "obtener un número primo al lanzar un dado", y el suceso B "obtener un 6", son incompatibles.

En particular, dos sucesos contrarios son incompatibles.

Más general, los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son incompatibles si son incompatibles dos a dos.

Sucesos compatibles. Los sucesos A y B son compatibles si su realización simultánea es posible.

El suceso A "obtener un número primo al lanzar un dado" y el suceso B "obtener un número par", son compatibles, ya que si sale el 2 se verifican ambos sucesos.

OPERACIONES CON SUCESOS

Unión de los suceso A y B es el suceso que se realiza cuando uno al menos de los sucesos A y B se realiza. Se simboliza por $A \cup B$.

realización de $A \cup B \Leftrightarrow$ realización de A, o de B, o de A y B

Si A es el suceso "obtener un número par" al lanzar un dado, y B el suceso "obtener un múltiplo de tres".

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\} \quad \Rightarrow \quad A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

Más general, se llama unión de los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, al suceso que se realiza cuando al menos uno de los sucesos A_i se realiza. Se simboliza por $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

Intersección de los sucesos A y B es el suceso que se realiza cuando A y B se realizan simultaneamente. Se simboliza por $A \cap B$.

realización de $A \cap B \Leftrightarrow$ realización simultánea de A y B

$$A = \{2, 4, 6\}, \; B = \{3, 6\} \; \Rightarrow A \cap B = \{6\}$$

Más general, se llama intersección de los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, al suceso que se realiza cuando se realizan simultáneamente todos los A_i.

Los sucesos A y B son compatibles si y solo si $A \cap B \neq \phi$

Si A es el suceso "obtener un número par" al lanzar un dado, B el suceso "obtener un múltiplo de 3" y C el suceso "obtener un múltiplo de 5":

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{3, 6\}, \quad C = \{5\}$$
$$A \cap B = \{6\} \; ; \; A \cap C = \phi \quad ; \; B \cap C = \phi$$

los sucesos A y B son compatibles, A y C son incompatibles y B y C son incompatibles.

Se llama *diferencia* de los sucesos A y B al suceso que se realiza por los resultados que realizan A y no realizan B. Se simboliza por $A - B$. Se verifica que $A - B = A \cap \overline{B}$.

Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituyen una *partición* de Ω si ninguno es el ϕ, son incompatibles dos a dos, y, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

PROPIEDADES DE LA UNION Y DE LA INTERSECCION.

Sea un experimento aleatorio de espacio muestral Ω (siendo Ω, conjunto de los resultados, un conjunto finito no vacío), y $\mathscr{P}(\Omega)$ el conjunto de parte de Ω, o conjunto de los sucesos que se pueden considerar en el experimento, incluido el suceso imposible ϕ.

Se cumplen las siguientes propiedades:

$$\forall A, B, C, \ldots \in \mathscr{P}(\Omega): \left| \begin{array}{l} A \cup B \cup C \cup \ldots \in \mathscr{P}(\Omega) \\ A \cap B \cap C \cap \ldots \in \mathscr{P}(\Omega) \end{array} \right. \qquad (1)$$

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \ \exists \bar{A} \in \mathscr{P}(\Omega) \qquad (2)$$

	$A \cup \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$	(3)
	$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$	(4)
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	(5)
Asociativa:	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	(6)
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	(7)
Idempotente:	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	(8)
De complemento:	$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \ \exists \bar{A} \in \mathscr{P}(\Omega) \ / \ A \cup \bar{A} = \Omega$ y	$A \cap \bar{A} = \phi$	(9)
Simplificativa:	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	(10)
Leyes de De Morgan:	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	(11)

ALGEBRA DE BOOLE.

Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio, y $\mathscr{A}$ un conjunto cuyos elementos son sucesos de dicho experimento.

$\mathscr{A}$ es un **álgebra de Boole** de parte de Ω si y solo si se cumplen las tres propiedades siguientes:

1º $\mathscr{A} \neq \phi$

2º $\forall A \in \mathscr{A}, \quad \bar{A} \in \mathscr{A}$

3º $\forall (A, B) \in \mathscr{A}^2, \quad A \cup B \in \mathscr{A}$

El conjunto $\mathscr{P}(\Omega)$ es un álgebra de Boole sobre Ω

El conjunto $\{\phi, \Omega\}$ es un álgebra de Boole sobre Ω

Si Ω tiene al menos dos elementos y A es un subconjunto propio de Ω, el conjunto $\{\phi, A, \bar{A}, \Omega\}$ es un álgebra de Boole sobre Ω, llamada álgebra de Bernouilli o álgebra engendrada por A.

Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es una partición de Ω, el conjunto constituido por la unión finita de elementos de esta partición y el suceso imposible, es un álgebra de Boole, llamada álgebra engendrada por la partición $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$

Si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega) = \{\phi, \Omega, A, B, C, \ldots\}$ es un álgebra de Boole sobre Ω, cualquiera que sea $A \neq \phi$, el conjunto $\mathscr{B} = \{\phi \cap A, \Omega \cap A, A \cap A, B \cap A, C \cap A, \ldots\}$, es un álgebra de Boole cuyo conjunto universal es A.

Al par $\{\Omega, \mathscr{A}\}$, constituido por el conjunto de los resultados Ω, y el álgebra de Boole de los sucesos estocásticos $\mathscr{A}$ se le llama *espacio probabilizable*.

A los elementos de $\mathscr{A}$ se les llama *sucesos estocásticos*, y a los elementos r_i que constituyen Ω se les llama *sucesos elementales* o *resultados*.

Toda algebra de Boole sobre Ω contiene el conjunto universal Ω y el conjunto vacío ϕ. Estos son sucesos estocásticos, llamados sucesos *seguro* e *imposible*.

Teorema de Stone: A toda álgebra de Boole de sucesos $\mathscr{A}$ sobre Ω se le puede hacer corresponder un álgebra de Boole de partes del conjunto Ω que le es isomorfa.

Del isomorfismo entre las álgebras de Boole de sucesos y conjuntista se obtienen importantes ventajas:

- nos permite utilizar para los sucesos el lenguaje, que conocemos, de la teoría de conjuntos.
- deducir, de las propiedades de los conjuntos, las propiedades de los sucesos.
- representar los sucesos por el diagrama de Venn, como se hace en los conjuntos.
- en la Teoría de las Probabilidades podemos deducir las propiedades de las probabilidades de las propiedades de los conjuntos.
- podemos establecer las siguientes equivalencias:

SUCESOS	CONJUNTOS
suceso elemental	conjunto unitario
Ω = suceso seguro	Ω = conjunto universal
ϕ = suceso imposible	ϕ = conjunto vacío
suceso	subconjunto de Ω
suceso contrario	conjunto complementario
sucesos incompatibles	conjuntos disjuntos
unión de sucesos	unión de conjuntos
intersección de sucesos	intersección de conjuntos
$A \subset B$, el suceso A implica el suceso B	$A \subset B$, A es subconjunto de B
$\mathscr{P}(\Omega)$ conjunto de todos los sucesos del experimento de universo Ω, incluidos Ω y ϕ.	$\mathscr{P}(\Omega)$ = conjunto de partes de Ω

FRECUENCIAS.

Si se realizan n pruebas en un experimento aleatorio y el suceso A se presenta n_A veces, se dice que la *frecuencia absoluta* del suceso A en las n pruebas es n_A, y la *frecuencia relativa* es $\frac{n_A}{n}$. La frecuencia relativa la simbolizaremos por fr (A).

Se lanza un dado 10 veces, obteniendo los siguientes resultados: 5, 2, 1, 1, 3, 2, 6, 4, 3, 1. Si el suceso A es "obtener un número impar": $A = \{1, 3, 5\}$, la frecuencia absoluta de A es 6, y $\text{fr}(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

- La frecuencia relativa es un número racional tal que $0 \leqslant \text{fr}(A) \leqslant 1$.
- La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.
- La frecuencia relativa del suceso imposible es 0.
- Si A y $\bar{A}$ son dos sucesos contrarios: $\text{fr}(A) + \text{fr}(\bar{A}) = 1$.
- Si A y B son dos sucesos incompatibles: $\text{fr}(A \cup B) = \text{fr}(A) + \text{fr}(B)$.

DEFINICION DE PROBABILIDAD.

Definición axiomática de probabilidad. Una probabilidad P sobre un álgebra de Boole $\mathscr{A}$ de elemento universal Ω, es una aplicación de $\mathscr{A}$ en el intervalo real [0, 1] que satisface las tres propiedades siguientes, llamadas axiomas de la probabilidad:

- Para todo suceso $A \in \mathscr{A}$: $P(A) \geq 0$.
- $P(\Omega) = 1$.
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son sucesos de $\mathscr{A}$ incompatibles dos a dos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

P(A) se leerá "probabilidad del suceso A" o simplemente "probabilidad de A".

La terna $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ se llama *espacio de probabilidad.*

Toda aplicación del álgebra de Boole $\mathscr{A}$ en [0, 1] que cumpla los tres axiomas anteriores es una probabilidad. Cuando $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, se empieza asignando probabilidades a los sucesos elementales, teniendo que ser 1 la suma de las probabilidades de los sucesos elementales. Como cualquier otro suceso se puede descomponer en la unión de sucesos elementales (que son incompatibles dos a dos), por el tercer axioma se obtiene su probabilidad.

La asignación de probabilidades a los sucesos de un experimento aleatorio suele hacerse considerando las frecuencias relativas de los sucesos elementales en un número elevado de pruebas o bien, propiedades de simetría, geométricas, físicas, ... de los factores que engendran los sucesos.

Sea un dado trucado cuyas caras están numeradas con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Se lanza el dado 100 veces con los siguientes resultados:

	1	2	3	4	5	6
n_i	12	9	15	22	16	26

Asignando a cada suceso elemental una probabilidad igual a su frecuencia relativa se tendrá:

$$P(1) = \frac{12}{100} \;;\; P(2) = \frac{9}{100} \;;\; P(3) = \frac{15}{100} \;;\; P(4) = \frac{22}{100} \;;\; P(5) = \frac{16}{100} \;;\; P(6) = \frac{26}{100}$$

y la probabilidad del suceso A "sale un número impar":

$$P(A) = P(1, 3, 5) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{12}{100} + \frac{15}{100} + \frac{16}{100} = \frac{43}{100}$$

Si el dado es homogéneo, todas las caras tienen, en cada prueba, la misma posibilidad de salir, se dice que los sucesos elementales son equiprobables, y considerando que la suma de las probabilidades de los sucesos elementales tiene que ser igual a 1, se hace la siguiente asignación de probabilidades:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

La probabilidad del suceso A = (1, 3, 5) será:

$$P(A) = P(1, 3, 5) = P(1) + P3) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

De la definición de probabilidad se deducen las siguientes propiedades:

- las probabilidades de dos sucesos contrarios suman uno:

$$\boxed{P(A) + P(\bar{A}) = 1} \Rightarrow \boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

- la probabilidad del suceso imposible es cero: $\boxed{P(\phi) = 0}$
- para cualquier suceso A: $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$
- si A implica B $(A \subset B)$, se tiene: $\boxed{P(A) \leq P(B)}$

– para dos sucesos cualesquiera, A y B: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

– para tres sucesos cualesquiera A, B y C:

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

– si los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ constituyen una partición de Ω:

$$\boxed{P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1}$$

Sucesos equiprobables. Sea $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ un espacio de probabilidad finito, y A y B dos elementos de $\mathscr{A}$:

A y B son dos sucesos equiprobables si y solo si $P(A) = P(B)$.

Si $\Omega = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ y todos los sucesos elementales son equiprobables:

$$\left.\begin{array}{l} P(\Omega) = P(r_1, r_2, \ldots, r_n) \\ P(\Omega) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow P(r_1) + P(r_2) + \cdots + P(r_n) = 1 \Rightarrow n \cdot P(r_i) = 1 \Rightarrow P(r_i) = \frac{1}{n}$$

Si $A = \{r'_1, r'_2, \ldots, r'_{n'}\}$: $P(A) = P(r'_1) + P(r_2) + \cdots + P(r'_{n'}) = n' \cdot \frac{1}{n} = \frac{n'}{n} = \frac{\text{cardinal de } A}{\text{cardinal de } \Omega}$

Esta fórmula, llamada *regla de Laplace*, se suele expresar así: La probabilidad de un suceso A de un experimento aleatorio en el que todos sus sucesos elementales son equiprobables, es igual al número de casos favorables al suceso A dividido por el número de casos posibles del experimento.

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}}$$

Se puede también expresar así: La probabilidad de un suceso A de un experimento aleatorio en el que todos los sucesos elementales son equiprobables, es igual al número de resultados distintos en los que se realiza A, dividido por el número de resultados distintos del experimento.

Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 negras (de igual diámetro y de características idénticas). Se sacan al azar simultáneamente dos bolas. Se pide: a) Probabilidad de que las bolas sean de distinto color. b) Probabilidad de que sean blancas. c) Probabilidad de que sean negras. d) Probabilidad de que sean del mismo color.

(En este tipo de problemas de bolas hay que considerar que aunque las bolas sean del mismo color son distintas, podemos considerar que están numeradas para distinguir unas de otras).

Sea A el suceso "las dos bolas son de distinto color", B el suceso "las dos bolas son blancas" y N el suceso "las dos bolas son negras".

Como el orden no interviene en los resultados, el número de maneras distintas de sacar dos bolas de las ocho que tiene la urna es igual al número de combinaciones de ocho elementos tomados de dos en dos.

$$\text{número de casos posibles} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$$

a) Cada una de las 5 bolas blancas se puede combinar con cada una de las 3 negras para formar $5 \cdot 3 = 15$ parejas de bolas de distinto color, o sea que el número de casos favorables al suceso A es 15:

$$P(A) = \frac{15}{28}$$

b) El número de casos favorables al suceso B es igual al número de maneras distintas de sacar 2 bolas blancas entre las 5 blancas. Como el orden no interviene:

$$\text{casos favorables al suceso } B = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10 \Rightarrow P(B) = \frac{10}{28}$$

c)
$$P(N) = \frac{\binom{3}{2}}{28} = \frac{\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}}{28} = \frac{3}{28}$$

d) Nos piden $P(B \cup N)$. Por ser los sucesos B y N incompatibles:

$$P(B \cup N) = P(B) + P(N) = \frac{10}{28} + \frac{3}{28} = \frac{11}{28}$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA.

Sean A y B dos sucesos del mismo experimento aleatoria, tales que $P(B) > 0$.

Se llama **probabilidad condicionada de A respecto de B**, la probabilidad de que se realice A sabiendo que se ha realizado B. Se simboliza por $P(A/B)$.

Suponer que se ha realizado B equivale a restringir el universo a los sucesos elementales de B, y los sucesos favorables al suceso A, habiéndose realizado B, a los sucesos elementales de $A \cap B$.

Al valor de $P(A/B)$, que se refiere a un suceso ya realizado (B) se le da el nombre de *probabilidad a posteriori* de A, en contraposición al valor de $P(A)$, al que se da el nombre de *probabilidad a priori* de A, es decir, antes de hacer ninguna prueba y saber si B se ha realizado o no.

Supongamos que al realizar n pruebas se han obtenido los siguientes resultados:

n_A veces se ha realizado el suceso A

n_B veces se ha realizado el suceso B

n_{AB} veces se ha realizado el suceso $A \cap B$

de donde: $fr(A) = \frac{n_A}{n}$, $fr(B) = \frac{n_B}{n}$, $fr(A/B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{fr(A \cap B)}{fr(B)}$

y como las frecuencias relativas fluctúan en torno de las probabilidades, se hace la siguiente definición:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \quad , \quad P(B) > 0$$

De la misma forma, si $P(A) > 0$: $\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

De las dos últimas igualdades resulta, si A y B son sucesos de probabilidad no nula:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$$
$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)}$$

Estas igualdades se denominan **"teorema de la probabilidad compuesta"** o **"teorema de la intersección"**.

En un Instituto, el 60% de los alumnos de COU estudian Matemáticas I, y el 80% de los que estudian Matemáticas I estudian también Física. Se elige al azar un estudiante de COU de dicho Instituto, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Matemáticas I y Física?

Sea M el suceso "estudia Matemáticas I", F el suceso "estudia Física".

Por el teorema de la probabilidad compuesta: $P(M \cap F) = P(M) \cdot P(F/M) = \frac{60}{100} \cdot \frac{80}{100} = 0'6 \cdot 0'8 = 0'48$

El 48% de los alumnos de COU de dicho Instituto estudian ambas asignaturas.

– si A y B son incompatibles: $P(A/B) = \frac{P(\phi)}{P(B)} = 0$

– si $A \subset B$: $A \cap B = A \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}$

– si $A \subset B$: $A \cap B = B \Rightarrow P(A/B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

Teorema de la intersección para tres sucesos A, B y C, siendo $P(A \cap B) \neq 0$:

$$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B)}$$

Para cuatro sucesos A, B, C y D, siendo $P(A \cap B \cap C) \neq 0$:

$$\boxed{P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B) \cdot P(D/A \cap B \cap C)}$$

Tres amigos, Alvaro, Fernando y Luis, se encuentran una moneda de oro. Para decidir quién se queda con ella ponen en una urna dos bolas rojas y una blanca. Ganará el que saque la bola blanca. Si las extracciones las hacen por el orden: Alvaro, Fernando y Luis, hallar cuál de los tres tiene mayor probabilidad de quedarse con la moneda.

Sea A el suceso "Alvaro saca la bola blanca", F "Fernando saca la bola blanca" y L "Luis saca la bola blanca.

– ganará Alvaro si se realiza el suceso A: $P(A) = \frac{1}{3}$.

– ganará Fernando si se realiza el suceso $\bar{A} \cap F$: $P(\bar{A} \cap F) = P(\bar{A}) \cdot P(F/\bar{A}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

– ganará Luis si se realiza el suceso $\bar{A} \cap \bar{F} \cap L$: $P(\bar{A} \cap \bar{F} \cap L) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{F}/\bar{A}) \cdot P(L/\bar{A} \cap \bar{F}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

Los tres tienen la misma probabilidad de quedarse con la moneda.

SUCESOS INDEPENDIENTES.

Los sucesos A y B son independientes si y solo si

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

De esta definición y del teorema de la probabilidad compuesta, resulta que los sucesos A y B son independientes si y solo si $P(A/B) = P(A)$ y $P(B/A) = P(B)$.

En el experimento de lanzar un dado homogéneo y leer el número de la cara superior se consideran los sucesos A "se obtiene un número primo", B "se obtiene un múltiplo de 2" y C "se obiene un múltiplo de 3". Estudiar la independencia de estos sucesos.

$A = \{1, 2, 3, 5\}$; $B = \{2, 4, 6\}$; $C = \{3, 6\}$; $A \cap B = \{2\}$; $A \cap C = \{3\}$; $B \cap C = \{6\}$

$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$; $P(B \cap C) = \frac{1}{6}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \neq P(A \cap B) \Rightarrow$ los sucesos A y B no son independientes

$P(A) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \neq P(A \cap C) \Rightarrow$ los sucesos A y C no son independientes

$P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(B \cap C) \Rightarrow$ los sucesos B y C son independientes

Si los sucesos A y B son independientes, también son independientes los sucesos $\bar{A}$ y $\bar{B}$, los sucesos $\bar{A}$ y B, y los sucesos A y $\bar{B}$.

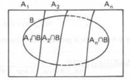
Los sucesos A, B y C son independientes si se verifican las cuatro relaciones siguientes:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

- $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

TEOREMA DE LA PARTICION o de la probabilidad total.

Sean los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que constituyen una partición de Ω, o sea son incompatibles dos a dos y $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$, y tales que $P(A_i) > 0$:



$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B) \Rightarrow$$

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)]$$

y por ser los sucesos $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B$ incompatibles dos a dos:

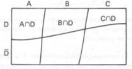
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \Rightarrow$$

$$\boxed{P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Una fábrica de tornillos tiene tres máquinas A, B y C. La máquina A produce el 50% de los tornillos, la B el 30% y la C el 20%. Se sabe que el 5% de los tornillos producidos por la máquina A son defectuosos, el 8% de los producidos por la máquina B son defectuosos y el 10% de los producidos por la máquina C son defectuosos.

De la producción de un día se toma un tornillo al azar, hallar la probabilidad de que sea defectuoso.

Sean A, B y C, respectivamente, "el tornillo elegido ha sido fabricado por la máquina A, B y C", y D el suceso "el tornillo elegido es defectuoso".



$$D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D) \Rightarrow$$

$$P(D) = P[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)]$$

por ser los sucesos $A \cap D$, $B \cap D$ y $C \cap D$ incompatibles dos a dos:

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= \frac{50}{100} \cdot \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \cdot \frac{8}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{10}{100} = \frac{250 + 240 + 200}{10000} = \frac{690}{10000} = 0{,}069$$

TEOREMA DE BAYES.

Sean los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$, que constituyen una partición de Ω, y B un suceso que se sabe que se ha realizado al hacer una prueba.

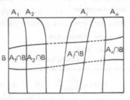
Se conocen:

— las probabilidades condicionadas

$$P(B/A_1),\ P(B/A_2), \ldots, P(B/A_i), \ldots, P(B/A_n)$$

— las probabilidades "a priori"

$$P(A_1),\ P(A_2), \ldots, P(A_n)$$



y se desea calcular la probabilidad "a posteriori" $P(A_i/B)$.

De la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \qquad (1)$$

como $\qquad B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_i \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$

y los sucesos $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B, \ldots, A_i \cap B, \ldots, A_n \cap B$ son incompatibles dos a dos:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_i \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)}$$

y por el teorema de la probabilidad compuesta:

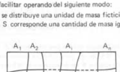
$$\boxed{P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_i) \cdot P(B/A_i) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}}$$

Esta es la fórmula del *teorema de Bayes*.

La aplicación prática del teorema de Bayes se suele facilitar operando del siguiente modo:

Usando un diagrama de Venn, podemos suponer que se distribuye una unidad de masa ficticia sobre el espacio muestral Ω, de tal modo que a cada suceso S corresponde una cantidad de masa igual a P(S).

Suponer que se ha realizado B equivale a restringir el universo a los sucesos elementales de B y los casos favorables al suceso A_i a los sucesos elementales de $A_i \cap B$, de donde:



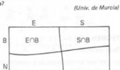
$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

que es la fórmula (1). A partir de aquí se continua hasta obtener la fórmula de Bayes y se aplican los datos del problema.

En cierto país, donde la enfermedad A es endémica, se sabe que un 12% de la población padece dicha enfermedad. Se dispone de una prueba para detectar la enfermedad, pero no es totamente fiable, ya que da positiva en el 90% de los casos de personas realmente enfermas y también da positiva en el 5% de las personas sanas. Se elige una persona al azar, se le hace la prueba y da positiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté sana?

(Univ. de Murcia)

Sea E el suceso "la persona elegida está enferma", S el suceso "la persona elegida está sana", B el suceso "la prueba da positiva" y N el suceso "la prueba da negativa".



Según el enunciado:

$P(E) = 0{,}12$; $P(S) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$; $P(B/E) =$

$= 0{,}90$; $P(B/S) = 0{,}05$

Nos piden: P(S/B).

El saber que la prueba ha dado positiva equivale a restringir el universo al suceso B, y los casos favorables al suceso S a los sucesos elementales del suceso $S \cap B$:

$$P(S/B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} \quad (1) ; \quad B = (E \cap B) \cup (S \cap B) \Rightarrow P(B) = P[(E \cap B) \cup (S \cap B)]$$

y como los sucesos $E \cap B$ y $S \cap B$ son incompatibles: $P(B) = P(E \cap B) + P(S \cap B)$ llevando este valor a (1):

$$P(S/B) = \frac{P(S \cap B)}{P(E \cap B) + P(S \cap B)} = \frac{P(S) \cdot P(B/S)}{P(E) \cdot P(B/E) + P(S) \cdot P(B/S)} = \frac{0{,}88 \cdot 0{,}05}{0{,}12 \cdot 0{,}90 + 0{,}88 \cdot 0{,}05} = \frac{88 \cdot 5}{12 \cdot 90 + 88 \cdot 5} = \frac{440}{1520} = 0{,}29$$

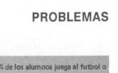
PROBLEMAS

14.1 En una clase en la que todos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega al futbol o al baloncesto y el 10% practica ambos deportes. Si además hay un 60% que no juega al futbol, ¿cuál será la probabilidad de que escogido al azar un alumno de la clase:

a) Juegue sólo al futbol.
b) Juegue sólo al baloncesto.
c) Practique uno solo de los deportes (futbol o baloncesto).
d) No juegue ni al futbol ni al baloncesto.

(Univ. de La Laguna – Tenerife)

Supongamos que en total hay a alumnos:



$\text{card}(F \cap \overline{B}) + \text{card}(F \cap B) + \text{card}(B \cap \overline{F}) + \text{card}(\overline{F \cup B}) = a \quad (1)$

$\text{card}(F \cap \overline{B}) + \text{card}(F \cap B) + \text{card}(B \cap \overline{F}) = 0{,}60\,a \quad (2)$

$\text{card}(F \cap B) = 0{,}10\,a \quad (3)$

$\text{card}(\overline{F \cup B}) + \text{card}(B \cap \overline{F}) = 0{,}60\,a \quad (4)$

$(1) - (2)$: $\text{card}(\overline{F \cup B}) = 0{,}4\,a$

llevando este valor a (4): $\text{card}(B \cap \overline{F}) = 0{,}6\,a - 0{,}4\,a = 0{,}2\,a$

llevando este resultado y (3) a (2): $\text{cad}(F \cap \overline{B}) = 0{,}6\,a - 0{,}1\,a - 0{,}2\,a = 0{,}3\,a$

a) $P(F \cap \overline{B}) = \dfrac{0{,}3a}{a} = \boxed{0{,}3}$

b) $P(B \cap \overline{F}) = \dfrac{0{,}2\,a}{a} = \boxed{0{,}2}$

c) $P[(F \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{F})] =$

(por ser los sucesos $F \cap B$ y $B \cap F$ incompatibles):

$$= P(F \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{F}) = \frac{0{,}3a}{a} + \frac{0{,}2\,a}{a} = \boxed{0{,}5}$$

d) $P(\overline{F \cup B}) = \dfrac{0{,}4\,a}{a} = \boxed{0{,}4}$

14.2 **Las caras de un dado homogéneo están numeradas del 1 al 6. Hallar la probabilidad de que al lanzar el dado la suma de los números de las caras visibles sea múltiplo de 5.**

(Univ. de Madrid)

Hallaremos los resultados posibles considerando el número de la cara oculta, habrá por tanto 6 resultados distintos, igual al de casos posibles del experimento.

Al ser el dado homogéneo, todos los resultados son equiprobables, se puede emplear la fórmula de Laplace para calcular la probabilidad pedida.

La suma de los seis números de las caras es $1+2+3+4+5+6=21$. La suma de las caras visibles será múltiplo de 5 si el número de la cara oculta es el 1 ó el 6. Los casos favorables al suceso "la suma de las caras visibles es múltiplo de 5", es 2, de donde:

$$\text{Probabilidad pedida} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

14.3 **Se tiran dos dados. Sea E el suceso de que la suma de los puntos obtenidos sea impar. Sea F el suceso de que por lo menos uno de los dados muestre un 1. Calcular $P(E \cap F)$ y $P(E \cup F)$.**

(Univ. de Madrid)

El suceso E será: $E = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6), (5,2), (5,4), (5,6), (2,1), (4,1), (6,1), (2,3), (4,3), (6,3), (2,5), (4,5), (6,5)\}$

el suceso F será: $F = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\}$

$E \cap F = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (4,1), (6,1)\}$

$E \cup F = \{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6), (5,2), (5,4), (5,6), (2,1) (4,1), (6,1),$
$(2,3), (4,3), (6,3), (2,5), (4,5), (6,5), (1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (5,1)\}$

como los casos posibles son $6 \cdot 6 = 36$ ya que cada una de las 6 caras del primer dado se combina con cada una de las 6 caras del segundo:

$$P(E \cap F) = \frac{6}{36} = \boxed{\frac{1}{6}}; \qquad P(E \cup F) = \boxed{\frac{23}{36}}$$

14.4 **Se lanza un dado dos veces. Hallar la probabilidad**

a) De que primero salga un cuatro y luego no.

b) De que se obtenga por lo menos un dos.

(Univ. de Valladolid, 1991)

El espacio muestral tiene $6 \times 6 = 36$ sucesos elementales, igualmente posibles:

a) El suceso A "sale primero un cuatro y luego no" es

$$A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6)\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \boxed{\frac{5}{36}}$$

b) El suceso B "sale por lo menos un dos" es:

$$B = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \boxed{\frac{11}{36}}$$

14.5 En una urna hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Hallar la probabilidad de que al extraer simultaneamente dos bolas resulten de la misma paridad.

(Univ. de Madrid, 1991)

Sea A el suceso "las dos bolas son pares" y B el suceso "las dos bolas son impares". El suceso "las dos bolas son de la misma paridad" será $A \cup B$. Como A y B son sucesos incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

El número de casos favorables al suceso A es el número de maneras distintas de sacar dos bolas entre las 4 pares, como el orden no interviene, serán $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$, y el número de casos favorables al suceso B será $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$. El número de casos posibles será $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$, de donde:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{10}{36} = \frac{16}{36} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

14.6 Una urna contiene tres bolas rojas y dos verdes, y otra contiene dos bolas rojas y tres verdes. Se toma, al azar, una bola de cada urna. Escriba el espacio muestral. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean del mismo color? ¿Y la de que sean de distinto color?

(Univ. de Ganada)

Sean I y II las urnas. La composición de cada urna será la siguiente:

Urna I: $(R_{11}, R_{12}, R_{12}, V_{11}, V_{12})$

Urna II: $(R_{21}, R_{22}, V_{21}, V_{22}, V_{23})$

Cada una de las cinco bolas de la urna I se puede combinar con cada una de las cinco bolas de la urna II para formar $5 \cdot 5 = 25$ parejas de bolas que constituirán el espacio muestral:

$$\Omega = \{(R_{11}, R_{21}), (R_{11}, R_{22}), (R_{11}, V_{21}), (R_{11}, V_{22}), (R_{11}, V_{23}), \ldots, (V_{12}, R_{21}), (V_{12}, R_{22}), (V_{12}, V_{21}), (V_{12}, V_{22}), (V_{12}, V_{23})\}.$$

Sea A el suceso "las dos bolas son del mismo color", y B el suceso "las dos bolas son de distinto color".

Los casos posibles son 25, igual al número de elementos de Ω.

Obtención del número de casos favorables al suceso A: Cada una de las 3 bolas rojas de la urna I se puede combinar con cada una de las 2 bolas rojas de la urna II, para formar $3 \times 2 = 6$ parejas de bolas rojas en que hay una bola roja de cada urna. De la misma forma se razona que hay $2 \times 3 = 6$ formas distintas de sacar una bola verde de la urna I y una bola verde de la urna II. Los casos favorables al suceso A son $6 + 6 = 12$.

$$P(A) = \boxed{\frac{12}{25}}$$

Los sucesos A y B son contrarios, de donde:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{12}{25} = \boxed{\frac{13}{25}}$$

14.7 Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. La probabilidad de extracción de cada una de las bolas es proporcional al número que en ellas aparece. Se extrae una sola bola y, sin devolverla a la urna, se saca una segunda bola. Se pide:

a). Hallar la constante de proporcionalidad.
b). El conjunto de todos los resultados posibles que pueden darse.
c). La probabilidad de que al extraer una bola, la puntuación sea número par.

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

a) Si B_i es el suceso "se extrae la bola numerada con el número i al sacar una bola", el espacio muestral será:

$$\Omega = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$$

siendo los sucesos B_i, sucesos elementales. Se puede escribir:

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \;\Rightarrow\; 1 = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)$$

y si k es la constante de proporcionalidad:

$$1 = 1 \cdot k + 2 \cdot k + 3 \cdot k + 4 \cdot k \;\Rightarrow\; 1 = 10 \cdot k \;\Rightarrow\; \boxed{k = \frac{1}{10}}$$

b) Sea (a, b) el suceso elemental "al extraer dos bolas sin reemplazamiento, la primera bola es la numerada con el número a y la segunda con el número b":

$$\boxed{\Omega' = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}}$$

c) En el experimento de extraer una sola bola, los sucesos B_2 y B_4 son incompatibles, de donde:

$$P(B_2 \cup B_4) = P(B_2) + P(B_4) = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

14.8 Ante un examen, un alumno sólo ha estudiado 15 de los 25 temas correspondientes a la materia del mismo. Este se realiza extrayendo al azar dos temas y dejando que el alumno escoja uno de los dos para ser examinado del mismo. Halla la probabilidad de que el alumno pueda elegir en el examen uno de los temas estudiados.

(Univ. de Cantabria)

Sea N el suceso "los dos temas extraidos son de los 10 que no ha estudiado el alumno", y S el suceso "el alumno ha estudiado alguno de los dos temas extraidos". Los suceso N y S son contrarios

Casos posibles: Serán las distintas formas de sacar 2 temas entre los 25, el orden no interviene:

$$\text{número de casos posibles} = \binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$$

Casos favorables al suceso N: Serán las distintas formas de sacar 2 temas entre los 10 que no ha estudiado el alumno.

$$\text{número de casos favorables a } N = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

de donde: $P(N) = \dfrac{45}{300} = \dfrac{3}{20} \;\Rightarrow\; P(S) = 1 - P(N) = 1 - \dfrac{3}{20} = \boxed{\dfrac{17}{20}}$

14.9 Una clase consta de 6 niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de 3 al azar, hallar la probabilidad de:

a) Seleccionar tres niños.
b) Seleccionar exactamente dos niños y una niña.
c) Seleccionar por lo menos un niño.
d) Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.

(Univ. de Murcia)

Los casos posibles son las distintas maneras de escoger 3 personas entre las 16 de la clase, considerando que dos maneras son distintas cuando difieran en alguna persona, el orden no interviene:

$$\text{número de casos posibles} = \binom{16}{3} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3!} = 560$$

a) El número de casos favorables a elegir 3 niños entre los 10 es: $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$

$$P(\text{seleccionar } 3 \text{ niños}) = \frac{120}{560} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

b) Cada uno de los grupos distintos de 2 niños: $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$, se combina con cada una de las 6 niñas para formar $45 \cdot 6 = 270$ grupos distintos de 2 niños y una niña:

$$P(\text{seleccionar } 2 \text{ niños y } 1 \text{ niña}) = \frac{270}{560} = \boxed{\frac{27}{56}}$$

c) El suceso "seleccionar por lo menos un niño" es el suceso contrario de "seleccionar 3 niñas"

$$\text{número de casos favorables a seleccionar 3 niñas: } \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$$

$$P(\text{seleccionar tres niñas}) = \frac{20}{560} = \frac{1}{28} \Rightarrow P(\text{seleccionar por lo menos un niño}) = 1 - \frac{1}{28} =$$

$$= \frac{28-1}{28} = \boxed{\frac{27}{28}}$$

d) $P(\text{seleccionar } 2 \text{ niñas y } 1 \text{ niño}) = \dfrac{\binom{6}{2} \cdot 10}{560} = \dfrac{15 \cdot 10}{560} = \boxed{\dfrac{15}{56}}$

14.10 De una baraja de 48 cartas se extraen simultáneamente dos de ellas. Calcular la probabilidad de que:

a) Las dos sean copas.
b) Al menos una sea copas.
c) Una sea copas y la otra espadas.

(Univ. de las Islas Baleares)

a) Los casos posibles son los distintos modos de sacar 2 cartas entre las 48 de la baraja, considerando que dos modos son distintos si difieren en alguna carta, el orden no interviene:

$$\text{número de casos posibles} = \binom{48}{2} = \frac{48 \cdot 47}{2} = 1128$$

$$\text{número de casos favorables} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

$$P(\text{la dos cartas son copas}) = \frac{66}{1128} = \boxed{\frac{11}{188}}$$

b) Sea A el suceso "ninguna de las dos cartas es copas". El suceso $\bar{A}$, será "al menos una carta es copas".

Hay 36 cartas que no son copas:

$$\text{número de casos favorables al suceso } A = \binom{36}{2} = \frac{36 \cdot 35}{2} = 630$$

$$P(A) = \frac{630}{1128} = \frac{105}{188} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{105}{188} = \frac{188 - 105}{188} = \boxed{\frac{83}{188}}$$

c) Casos favorables: Cada una de las 12 copas se puede combinar con cada una de las 12 espadas para formar $12 \cdot 12 = 144$ parejas en que hay una carta de copas y otra de espadas:

$$P(\text{una carta sea copas y la otra espadas}) = \frac{144}{1128} = \boxed{\frac{6}{47}}$$

14.11 **Un grupo de 10 personas se sienta en un banco. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas fijadas de antemano se siente juntas?**

(Univ. de Sevilla, 1991)

Podemos suponer que el banco tiene 10 asiendos numerados del 1 al 10.

Casos posibles: $P_{10} = 10!$

Casos favorables: Sean a y b las personas que deben sentarse juntas: podrán sentarse en los lugares (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9) y (9, 10) y, en cada una de estas parejas, de la forma ab o ba, o sea de $9 \cdot 2 = 18$ maneras distintas, siendo ocupados los ocho lugares restantes por las otras ocho personas de 8! maneras. En total hay $18 \cdot 8!$ maneras distintas de sentarse las 10 personas, estando dos personas fijadas de antemano sentadas juntas.

$$P = \frac{18 \cdot 8!}{10!} = \frac{18}{10 \cdot 9} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

14.12 **Un cartero reparte al azar tres cartas entre tres destinatarios. Calcular la probabilidad de que al menos una de las tres cartas llegue a su destino correcto.**

(Univ. de Granada, 1991)

Si las cartas y los destinatarios correspondientes se numeran con los números 1, 2 y 3, simbolizando por (a, b, c) que la carta numerada con el número a se entrega al destinatario 1, la carta numerada con el número b se entrega al destinatario 2, y la carta numerada con el número c se entrega al destinatario 3, el espacio muestral es:

$$\Omega = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$$

Si A es el suceso "al menos una de las tres cartas llega a su destino correcto:

$$A = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)\}$$

de donde $$P(A) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

14.13 **Demostrar que si los sucesos A y B son independientes, también son independientes $\overline{A}$ y $\overline{B}$.**

(Univ. de Madrid)

Por ser A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$\overline{A}$ y $\overline{B}$ serán independientes si $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$

Aplicando las relaciones de De Morgan y la probabilidad del suceso contrario:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = [1 - P(A)] - P(B) \cdot [1 - P(A)] =$$

$$= [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow$$

$\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.

14.14 **Demostrar que si los sucesos A y B son independientes, también son independientes A y $\overline{B}$.**

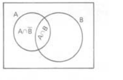
(Univ. de Zaragoza, 1991)

Por ser A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Los sucesos A y $\overline{B}$ serán independientes si se verifica que $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$.

$A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$, y por ser $(A \cap \overline{B})$ y $(A \cap B)$ incompatibles, ya que $(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) =$

$= (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap A) = A \cap (\overline{B} \cap B) \cap A = A \cap \phi \cap A = \phi$:



$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) \Rightarrow$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) =$

$= P(A)[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \Rightarrow$ A y $\overline{B}$ son independientes.

14.15 **Sea A un suceso tal que $0 < P(A) < 1$.**

a) ¿Puede ser A independiente de su contrario $\overline{A}$?

b) Sea B otro suceso tal que $B \subset A$. ¿Serán A y B independientes?

c) Sea C un suceso independiente de A. ¿Serán A y $\overline{C}$ independientes?

(Univ. de Murcia)

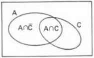
a)
$$\left.\begin{array}{l} 0 < P(A) < 1 \\ P(\overline{A}) = 1 - P(A) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < P(\overline{A}) < 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(A) \cdot P(\overline{A}) \neq 0 \\ P(A \cap \overline{A}) = P(\phi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A y } \overline{A} \text{ no son}$$

independientes.

b) $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$

$P(A) \cdot P(B)$ sólo sería igual a $P(B)$ si $P(A) = 1$, pero como $0 < P(A) < 1$, no se verificará $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, o sea que A y B no son independientes (excepto si $B = \phi$).

c) $A = (A \cap \bar{C}) \cup (A \cap C)$
$(A \cap \bar{C}) \cap (A \cap C) = A \cap (\bar{C} \cap C) = A \cap \phi = \phi$ $\Rightarrow$



$P(A) = P(A \cap \bar{C}) + P(A \cap C) \;\Rightarrow$
$P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A \cap C) \qquad (1)$

Por ser A y C independientes: $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$, llevando este valor a (1):

$$P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A) \cdot P(C) = P(A)\,[1 - P(C)] = P(A) \cdot P(\bar{C}) \;\Rightarrow\; A \text{ y } \bar{C} \text{ son independientes.}$$

14.16 Demostrar que si los suceso A y B son independientes, se verifica:

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

(Univ. de Madrid)

Por ser A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \\ &= [1 - P(\bar{A})] + [1 - P(\bar{B})] - [1 - P(\bar{A})]\,[1 - P(\bar{B})] = \\ &= 1 - P(\bar{A}) + 1 - P(\bar{B}) - 1 + P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \\ &= 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \end{aligned}$$

14.17 Hallar $P(A \cap \bar{B})$, conociendo $P(A)$ y $P(A \cap B)$.

(Univ. de Salamanca)

$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

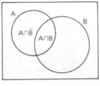
y al ser $(A \cap \bar{B})$ y $(A \cap B)$ sucesos incompatibles, ya que

$(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cap (B \cap A) =$

$= A \cap (\bar{B} \cap B) \cap A = A \cap \phi \cap A = \phi$

$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \;\Rightarrow$

$\boxed{P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$

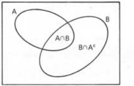


14.18 Sean A y B dos sucesos y A^c el suceso contrario de A. Si son conocidas las probabilidades de los sucesos $A \cup B$, A^c y $A \cap B$, ¿cómo puedes hallar las probabilidades de los sucesos B, A y $A^c \cap B$?

(Univ. de Zaragoza)

$$\left.\begin{array}{l} A \cap A^c = \phi \\ A \cup A^c = \Omega \end{array}\right| \;\Rightarrow\; P(A \cup A^c) = P(\Omega) \;\Rightarrow\; P(A) + P(A^c) = 1 \;\Rightarrow\; P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \;\Rightarrow\; P(B) &= P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = \\ &= P(A \cup B) - 1 + P(A^c) + P(A \cap B) \end{aligned}$$



$B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c) \Rightarrow$

$P(B) = P[(A \cap B) \cup (B \cap A^c)]$

y por ser $A \cap B$ y $B \cap A^c$ incompatibles, ya que

$(A \cap B) \cap (B \cap A^c) = (B \cap A) \cap (A^c \cap B) =$

$= B \cap (A \cap A^c) \cap B = B \cap \phi \cap B = \phi$;

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A^c) \Rightarrow$

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) =$

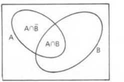
$$= P(A \cup B) - 1 + P(A^c) + P(A \cap B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) + P(A^c) - 1$$

Resumen:

$\boxed{P(A) = 1 - P(A^c)}$, $\boxed{P(B) = P(A \cup B) + P(A^c) + P(A \cap B) - 1}$, $\boxed{P(A^c \cap B) = P(A \cup B) + P(A^c) - 1}$

14.19 Dados los sucesos A y B, demostrar que

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$$



$A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$

y por ser los sucesos $A \cap \overline{B}$ y $A \cap B$ incompatibles ya que:

$(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap A) =$

$= A \cap (\overline{B} \cap B) \cap A = A \cap \phi \cap A = \phi$

$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$

y como $P(A \cap \overline{B}) \geq 0$: $P(A) \geq P(A \cap B)$ (1)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, y como de (1) resulta que también $P(B) \geq P(A \cap B)$, o lo que es igual: $P(B) - P(A \cap B) \geq 0$, resulta:

$$P(A \cup B) \geq P(A) \quad (2)$$

De (1) y (2): $\boxed{P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)}$

14.20 Estudiar la posible dependencia de dos sucesos, A y B, en los casos a), b), c), indicando cuándo serán independientes:

a) A y B son incompatibles y de probabilidad no nula.
b) A está incluido en B, y A es un suceso de probabilidad no nula.
c) A es cualquier suceso y $P(B) = 0$.

(Univ. de Navarra, 1991)

a) Por ser A y B incompatibles: $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0$
Por ser $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$: $P(A) \cdot P(B) \neq 0$ $\Bigg\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

A y B no son independientes

b) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$

$P(A) \neq 0 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A)$ sòlo si $P(B) = 1$

si $P(B) = 1$: $P(A \cap B) = P(A \cdot P(B) \Rightarrow$ A y B son independientes

si $P(B) \neq 1$: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$ A y B no son independientes

c) Cualesquiera que sean A y B: $A \cap B \subset B \Rightarrow P(A \cap B) \leqslant P(B)$, de donde:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si} & P(B) = 0: \quad P(A \cap B) = 0 \\ \text{si} & P(B) = 0: \quad P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot 0 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

los sucesos A y B son independientes.

14.21 Razonar la afirmación de que si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es menor que $\frac{1}{2}$, la suma de las probabilidades de ambos (por seperado), no puede exceder de $\frac{3}{2}$.

(Univ. de Madrid)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \qquad (1)$$

$$0 \leqslant P(A \cup B) \leqslant 1$$

$$0 \leqslant P(A \cap B) < \frac{1}{2}$$

$$\overline{0 \leqslant P(A \cup B) + P(A \cap B) < 1 + \frac{1}{2}} \overset{(1)}{\Rightarrow} P(A) + P(B) < \frac{3}{2}$$

14.22 Sean A y B sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{5}$.

a) Probar que si $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, entonces A y B son independientes.

b) Para los mismos valores de P(A) y P(B) dados antes, ¿hay otros valores de $P(A \cup B)$ que hacen que A y B sean independientes?

c) Demostrar que si A y B son independientes, entonces $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes.

(Univ. de Zaragoza, 1991)

a) $$\left.\begin{array}{l} P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{3}{5},\ P(A \cup B) = \frac{4}{5} \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \end{array}\right| \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5+6-8}{10} = \frac{3}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \text{A y B son independientes.}$$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - P(A \cup B) = \frac{11}{10} - P(A \cup B)$$

Los sucesos A y B serán independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$\frac{11}{10} - P(A \cup B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{11}{10} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \boxed{\frac{4}{5}} \text{ , valor anterior.}$$

c) Está resuelto en el problema 16.14.

14.23 Dados dos sucesos independientes A y B, la probabilidad de que ocurran los dos a la vez es $\frac{1}{6}$ y de que no ocurra ninguno de los dos $\frac{1}{3}$. Calcular sus probabilidades.

(Univ. de Oviedo, 1991)
(Univ. de Málaga, 1991)

Por ser A y B independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ $\Rightarrow P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6}$ (1)

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A) + P(B) - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \qquad (2)$$

De (2): $P(A) = \frac{5}{6} - P(B)$, llevando este valor a (1): $\left(\frac{5}{6} - P(B)\right) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \Rightarrow$

$$6\left(P(B)\right)^2 - 5 \cdot P(B) + 1 = 0 \Rightarrow P(B) = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

14.24 Un hombre y una mujer de la misma edad se casan a los 20 años. Las probabilidades de que lleguen a los 70 años son 0,76 para el hombre y 0,82 para la mujer.

Se pregunta cuál es la probabilidad de que a los 70 años: a) Ambos estén vivos. b) No viva ninguno de los dos. c) Viva solamente la mujer. d) Viva al menos uno de ellos.

(Univ. de las Islas Baleares, 1991)
(Univ. del País Vasco, 1991)

Sea H el suceso "el hombre llega a los 70 años", y M el suceso " la mujer llega a los 70 años". Por las características del problema, se supone que los sucesos H y M son independientes.

a) $P(H \cap M) = P(H) \cdot P(M) = 0{,}76 \cdot 0{,}82 = \boxed{0{,}6232}$

b) Si los sucesos H y M son independientes, también son independientes $\overline{H}$ y $\overline{M}$ (véase problema 16.13):

$$P(\overline{H} \cap \overline{M}) = P(\overline{H}) \cdot P(\overline{M}) = [1 - P(H)][1 - P(M)] = (1 - 0{,}76)(1 - 0{,}82) = 0{,}24 \cdot 0{,}18 = \boxed{0{,}0432}$$

c) Si los sucesos H y M son independientes, también son independientes $\overline{H}$ y M, (16.14):

$$P(\overline{H} \cap M) = P(\overline{H}) \cdot P(M) = [1 - P(H)] \cdot P(M) = (1 - 0{,}76) \cdot 0{,}82 = 0{,}24 \cdot 0{,}82 = \boxed{0{,}1968}$$

d) $P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = P(H) + P(M) - P(H) \cdot P(M) = 0{,}76 + 0{,}82 - 0{,}76 \cdot 82 =$

$$= \boxed{0{,}9568}$$

14.25 Se propone a Juan y a Pedro la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que lo resuelva Juan es de 1/3 y la de que lo resuelva Pedro, de 1/4. ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto? ¿Y de que no sea resuelto?

(Univ. de León, 1991)

Sea A el suceso "Juan resuelve el problema", y B el suceso "Pedro resuelve el problema". Los sucesos A y B, por las características del enunciado, se consideran independientes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4+3-1}{12} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

El suceso N "el problema no es resuelto" es el suceso contrario del suceso $A \cup B$, "el problema es resuelto", de donde:

$$P(N) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

14.26 Dos sucesos A y B verifican $P(A \cap B) = 0{,}3$; $P(A^c) = 0{,}4$; $P(B^c) = 0{,}5$.
Hallar $P(A \cup B)$ y $P(A/B)$.

(Univ. de Salamanca)

$P(A^c) = 0{,}4 \Rightarrow P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$; $\quad P(B^c) = 0{,}5 \Rightarrow P(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = \boxed{0{,}8}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

14.27 Sean A y B dos sucesos cualesquiera de probabilidad no nula e independientes. Justificar si son ciertas las siguientes afirmaciones:

a) $P(\overline{A}/\overline{B}) = P(A)$.
b) $P(\overline{B}/A) = P(\overline{B})$.
c) $P(A \cup \overline{A}) = 0{,}5$.

(Univ. de Córdoba, 1991)

a) Si A y B son independientes, también $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes, (véase problema 16.13), de donde: $P(\overline{A}/\overline{B}) = P(\overline{A})$.

En general no se verificará a). Se verificará sólo si $P(A) = P(\overline{A}) = 0{,}5$.

b) Si A y B son independientes, también A y $\overline{B}$ son independientes, (véase problema 16.14), de donde: $P(\overline{B}/A) = P(\overline{B})$.

c) $A \cup \overline{A} = \Omega \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) \neq 0{,}5$

14.28 En un espacio probabilístico, consideremos los sucesos A y B, ambos de probabilidad no nula. Razonar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si A y B son incompatibles, entonces son independientes.
b) Si A y B son independientes, entonces son incompatibles.
c) Si A y B son independientes: $(PA \cap B) = P(A / B) \cdot P(B / A)$.

(Univ. de Valencia)

a) $\left.\begin{array}{l} A \text{ y } B \text{ incompatibles} \Rightarrow A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = P(\phi) = 0 \\ P(A) \neq 0 \text{ y } P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

A y B son dependientes.

La afirmación del enunciado es FALSA.

b) $\left.\begin{array}{l} A \text{ y } B \text{ independientes} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A) \neq 0 \text{ y } P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow P(A \cap B) \neq 0 \Rightarrow A \cap B \neq \phi \Rightarrow$

A y B son compatibles.

La afimación del enunciado es FALSA.

c) $A \text{ y } B \text{ independientes} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A / B) = P(A) \\ P(B / A) = P(B) \end{array}\right. \Rightarrow P(A \cap B) = P(A / B) \cdot P(B / A)$

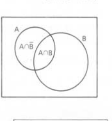
La afirmación del enunciado es VERDADERA.

14.29 Demostrar que $P(B/A) + P(\bar{B}/A) = 1$

(Univ. de Madrid)

$$P(B/A) + P(\bar{B}/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})}{P(A)} \qquad (1)$$



$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

y por ser $(A \cap \bar{B})$ y $(A \cap B)$ sucesos incompatibles, ya que:

$(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) = (A \ \ \bar{B}) \cap (B \cap A) =$

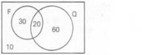
$= A \cap (\bar{B} \cap B) \cap A = A \cap \phi \cap A = \phi$:

$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \Rightarrow$ llevando este valor a (1): $\boxed{P(B/A) + P(\bar{B}/A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1}$

14.30 En un curso de COU hay 120 alumnos. 50 estudian Francés, 80 Química y 20 estudian Francés y Química. Se elige en ese curso un estudiante al azar, ¿qué probabilidad hay de que no estudie ninguna de las dos asignaturas? . Si se sabe que el alumno elegido estudia Francés, ¿que probabilidad hay de que también estudie Química?

(Univ. de Salamanca)

Usando los diagramas de Venn se obtiene que si estudian Francés y Química 20 alumnos, habrá 30 alumnos que estudian Francés y no estudian Química, y 60 alumnos que estudian Química y no estudian Francés, siendo $120-60-20-30=10$ los alumnos que no estudian ni Francés ni Química.



Aplicando la fórmula de Laplace, la probabilidad de que elegido un alumno al azar no estudie ni Francés ni Química será:

$$P_1 = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{10}{120} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

Si se sabe que el alumno elegido estudia Francés, los casos posibles quedan reducidos a los 50 alumnos que estudian Francés, y los casos favorables a que estudie también Química serán los 20 alumnos que estudian Francés y Química:

$$P_2 = \frac{20}{50} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

14.31 Se sortea un viaje a Singapur entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas. Se pide:

a) ¿Cuál será la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero?

b) Si del afortunado se sabe ya que es casado, ¿cuál será la probabilidad de que sea una mujer?

(Univ. de La Laguna–Tenerife)

Sea M, H, C y S, respectivamente, los sucesos elegir mujer, hombre, persona casada y persona soltera.

card $(H \cap C)$ + card $(H \cap S)$ + card $(M \cap C)$ + card $(M \cap S) = 120$ (1)

card $(M \cap C)$ + card $(M \cap S) = 65$ (2)

card $(H \cap C)$ + card $(M \cap C) = 80$ (3)

card $(M \cap C) = 45$ (4)

	C	S
H	$H \cap C$ 35	$H \cap S$ 20
M	$M \cap C$ 45	$M \cap S$ 20

(3) – (4): card $(H \cap C) = 35$; (2) – (4): card $(M \cap S) = 20$;

de (1): car $(H \cap S) = 120 - 35 - 45 - 20 = 20$

a) $$P(H \cap S) = \frac{20}{120} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

b) El saber que el afortunado es casado equivale a restringir el espacio muestral al suceso C, y los casos favorables a que sea mujer a los sucesos elementales del suceso $M \cap C$:

$$P(M/C) = \frac{45}{80} = \boxed{\frac{9}{16}}$$

14.32 Una caja contiene tres monedas. Una moneda es corriente, otra tiene dos caras y la otra está cargada de modo que la probabilidad de obtener cara es 1/3. Se selecciona una moneda al azar y se lanza al aire. Hallar la probabilidad de que salga cara.

(Univ. de Castilla – La Mancha)

Sean: A el suceso "se elige la moneda corriente",
B el suceso "se elige la moneda que tiene dos caras",
D el suceso "se elige la moneda cargada",
C el suceso "sale cara".

Nos piden la probabilidad del suceso $(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (D \cap C)$. Como los sucesos $A \cap C$, $B \cap C$ y $D \cap C$ son incompatibles dos a dos:

$$P[(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (D \cap C)] = P(A \cap C) + P(B \cap C) + P(D \cap C) = P(A) \cdot P(C/A) + P(B) \cdot P(C/B) +$$
$$+ P(D) \cdot P(C/D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{3+6+2}{18} = \boxed{\frac{11}{18}}$$

14.33 En una bolsa hay 5 bolas rojas, 3 bolas negras y dos bolas blancas. Se extre al azar una bola y sin devolverla, se extre otra.

a) Calcular la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.
b) Calcular la probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color.

(Univ. de Valladolid, 1991)

Sean: R_1 el suceso "la primera bola es roja", R_2 "la segunda bola es roja", N_1 "la primera bola es negra", N_2 "la segunda bola es negra", B_1 "la primera bola es blanca" y B_2 "la segunda bola es blanca".

a) El suceso C "las dos bolas son del mismo color", es:

$$C = (R_1 \cap R_2) \cup (N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2) \Rightarrow P(C) = P[(R_1 \cap R_2) \cup (N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2)]$$

y por ser los sucesos $(R_1 \cap R_2)$, $(N_1 \cap N_2)$ y $(B_1 \cap B_2)$ incompatibles dos a dos:

$$P(C) = P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap B_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) + P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) +$$
$$+ P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{20+6+2}{90} = \frac{28}{90} = \boxed{\frac{14}{45}}$$

b) El suceso D "las bolas son de distinto color" es el suceso contrario de C, de donde:

$$P(D) = 1 - \frac{14}{45} = \frac{45-14}{45} = \boxed{\frac{31}{45}}$$

14.34 Una caja A contiene 2 bolas blancas y 3 negras. Otra caja B contiene 3 bolas blancas y 2 negras. Sacamos una bola de la caja A y la introducimos en la caja B. Si a continuación se extrae una bola de la caja B, razona cuál es la porobabilidad de que sea blanca.

(Univ. de Valencia, 1991)

Sea B_1 el suceso "la bola que sacamos de la caja A y que introducimos en la caja B es blanca"; el suceso N_1 "la bola que sacamos de la caja A y que introducimos en la caja B es negra"; y el suceso B_2 la bola que extraemos de la caja B es blanca". Nos piden la probabilidad del suceso: $(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)$, y por ser incompatibles los sucesos $B_1 \cap B_2$ y $N_1 \cap B_2$:

$$P[(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap B_2)] = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) + P(N_1) \cdot P(B_2/N_1) =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \boxed{\frac{17}{30}}$$

14.35 **URNA I: Contiene 6 bolas rojas y 4 bolas blancas.**
URNA II: Contiene 4 bolas rojas y 8 bolas blancas.

Se lanza un dado. Si aparece un número menor que 3, nos vamos a la urna I; si el resultado es 3 o más nos vamos a la urna II. A continuación extraemos una bola. Se pide:

a) Probabilidad de que la bola sea roja y de la urna II.

b) Probabilidad de que la bola sea blanca.

(Univ. de Castilla – La Mancha, 1991)

a) Sea A el suceso "se obtiene al lanzar un dado un número menor que 3", C el suceso "se obtiene al lanzar un dado un número igual o mayor que 3", R_I el suceso "se saca bola roja de la urna I", R_{II} el suceso "se saca bola roja de la urna II", B_I "se saca bola blanca de la urna I" y B_{II} "se saca bola blanca de la urna II".

Para sacar bola roja de la urna II se tendrá que verificar el suceso $C \cap R_{II}$:

$$P(C \cap R_{II}) = P(C) \cdot P(R_{II}/C) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{12} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

b) Para sacar bola blanca se tendrá que verificar el suceso $(A \cap B_I) \cup (C \cap B_{II})$, siendo incompatibles los sucesos $A \cap B_I$ y $C \cap B_{II}$:

$$P[(A \cap B_I) \cup (C \cap B_{II})] = P(A \cap B_I) + P(C \cap B_{II}) = P(A) \cdot P(B_I/A) + P(C) \cdot P(B_{II}/C) =$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{15} + \frac{4}{9} = \frac{6+20}{45} = \boxed{\frac{26}{45}}$$

14.36 **Once bolas que llevan gravados los números del 1 al 11 están repartidas en 3 urnas. Una de estas urnas contiene las bolas con los números 1, 2, 3, 4 y 5, otra las que corresponden a los números 6, 7, 8 y 9 y la tercera a las dos bolas restantes. Elegida una urna al azar se sacan dos bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea par?**

(Univ. de Valladolid)

Supongamos que las urnas están numeradas con los números 1, 2 y 3. Sea U_i el suceso "se elige la urna numerada con el número i", y A, B y C los sucesos "se sacan, respectivamente de las urnas numeradas con el 1, 2 y 3, dos bolas tales que la suma de sus números sea par".

Nos piden la probabilidad del suceso: $(U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap B) \cup (U_3 \cap C)$.

Por ser los sucesos $U_1 \cap A$, $U_2 \cap B$ y $U_3 \cap C$ incompatibles dos a dos:

$$P[(U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap B) \cup (U_3 \cap C)] = P(U_1 \cap A) + P(U_2 \cap B) + P(U_3 \cap C) =$$

$$= P(U_1) \cdot P(A / U_1) + P(U_2) \cdot P(B / U_2) + P(U_3) \cdot P(C / U_3) \qquad (1)$$

$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$$

Los casos favorables a sacar dos bolas de la urna U_1 tales que la suma de sus números sea par son: (1, 3), (1, 5), (2, 4) y (3, 5), en total 4, y los casos posibles: $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$, de donde: $P(A / U_1) = $ $= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Los casos favorables a sacar dos bolas de la urna U_2 tales que la suma de sus números sea par son: (6, 8) y (7, 9), en total 2, y los casos posibles $\binom{4}{2} = 6$, de donde: $P(B/U_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

No hay ningún caso favorable a sacar dos bolas de la urna U_3 tales que la suma de sus números sea par, de donde $P(C/U_3) = 0$.

Sustituyendo estos valores en (1):

$$\text{Probabilidad pedida} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{0}{3} = \frac{2}{15} + \frac{1}{9} = \frac{6+5}{45} = \boxed{\frac{11}{45}}$$

14.37 Una comisión delegada de un pleno de cierto ayuntamiento está formada por 10 concejales de los cuales 5 pertenecen al partido A, 4 al partido B y 1 al partido C. Se eligen al azar y de forma sucesiva 3 personas de dicha comisión. Calcula la probabilidad de que las tres pertenezcan a:

a) Partidos distintos.
b) Al partido A.
c) Al partido C.

(Univ. de León, 1991)

Sea A_i, B_i y C_i, respectivamente, los sucesos "el candidato elegido en i lugar pertenece al partido A, B o C".

a) El suceso "elegir tres personas, en forma sucesiva, de partidos distintos" es:

$$D = (A_1 \cap B_2 \cap C_3) \cup (A_1 \cap C_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap C_2 \cap A_3) \cup (C_1 \cap A_2 \cap B_3) \cup$$
$$\cup (C_1 \cap B_2 \cap A_3)$$

y por ser incompatibles, dos a dos, los últimos sucesos:

$$P(D) = P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) + \cdots + P(C_1 \cap B_2 \cap A_3) = P(A_1)\cdot P(B_2/A_1)\cdot P(C_3/A_1 \cap B_2) + \cdots +$$
$$+ P(C_1)\cdot P(B_2/C_1)\cdot P(A_3/C_1 \cap B_2) = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8} = \frac{5\cdot 4\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot 6 = \boxed{\frac{1}{6}}$$

b) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} = \boxed{\frac{1}{12}}$

c) $P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(C_1)\cdot P(C_2/C_1)\cdot P(C_3/C_1 \cap C_2) = \frac{1}{10}\cdot 0\cdot 0 = \boxed{0}$

14.38 Un archivador tiene 9 cajones. Una carta tiene probabilidad 1/2 de estar en el archivador y, si está en el archivador, tiene la misma probabilidad de estar en cualquiera de los 9 cajones.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta esté en el noveno cajón?
b) Abrimos los 8 primeros cajones y la carta no está en ninguno de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta esté en el noveno cajón?

(Univ. de Barcelona)

a) Sea A el suceso "la carta está en el archivador" y C_9 el suceso "la carta está en el noveno cajón".

$$P(A \cap C_9) = P(A)\cdot P(C_9/A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

b). Si sabemos que la carta no está en los 8 primeros cajones, la carta estará en el noveno cajón si y solo si está en el archivador, o sea que, la probabilidad de que esté en el noveno cajón, sabiendo que no está en los 8 primeros cajones, es la misma de que esté en el archivador : $\boxed{\frac{1}{2}}$.

14.39 En cierta ciudad el 40% de la población tiene cabellos castaños, el 25% tiene los ojos castaños y el 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar.

Calcular:

a) Si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?

b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos castaños?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga cabellos ni ojos castaños?

(Univ. de Zaragoza)
(Univ. de Málaga)

Sea a el número de habitantes, C el suceso "se escoge una persona de cabellos castaños" y O el suceso "se escoge una persona de ojos castaños.

$\text{card } (C \cap O) + \text{card } (C \cap \bar{O}) + \text{card } (\bar{C} \cap O) + \text{card } (\bar{C} \cap \bar{O}) = a$

$\text{card } (C \cap O) + \text{card } (C \cap \bar{O}) = 0{,}4\ a$ (1)

$\text{card } (C \cap O) + \text{card } (\bar{C} \cap O) = 0{,}25\ a$ (2)

$\text{card } (C \cap O) = 0{,}15\ a$ (3)

	O	$\bar{O}$
C	$C\cap O$ $0{,}15a$	$C\cap\bar{O}$ $0{,}25a$
$\bar{C}$	$\bar{C}\cap O$ $0{,}1a$	$\bar{C}\cap\bar{O}$ $0{,}5a$

$(2) - (3)$: $\text{card } (\bar{C} \cap O) = 0{,}10\ a$;

$(1) - (3)$: $\text{card } (C \cap \bar{O}) = 0{,}25\ a$;

$\text{card } (\bar{C} \cap \bar{O}) = a - 0{,}15\ a - 0{,}25\ a - 0{,}1\ a = 0{,}5\ a$

a) El saber que tiene los cabellos castaños equivale a reducir el espacio muestral a $C = (C\cap O) \cup (C \cap \bar{O})$, y los casos favorables a que tenga los ojos castaños, sabiendo que tiene los cabellos castaños, a los sucesos elementales de $C \cap O$:

$$P(O/C) = \frac{0{,}15\ a}{0{,}15\ a + 0{,}25\ a} = \frac{15}{40} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

b) El saber que tiene los ojos castaños equivale a reducir el espacio muestral a $O = (C\cap O) \cup (\bar{C} \cap O)$, y los casos favorables a que no tenga cabellos castaños a los sucesos elementales de $\bar{C} \cap O$:

$$P(\bar{C}/O) = \frac{0{,}1a}{0{,}15\ a + 0{,}1\ a} = \frac{10}{25} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

c) $$P(\bar{C}/\bar{O}) = \frac{0{,}5\ a}{a} = \boxed{0{,}5}$$

14.40 Un sistema está formado por dos componentes A y B. El sistema funciona si funciona alguna de sus componentes, la probabilidad de que funcione A es $P(A) = 0{,}8$, la de que funcione B es $P(B) = 0{,}7$ y $P(A \cap B) = 0{,}6$.

1) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema funcione?

2) ¿Cuál es la probabilidad de que funcione la componente A, sabiendo que la componente B no funciona?

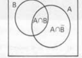
(Univ. de Madrid, 1991)

1) Funcionará alguna de sus componentes si se realiza $A \cup B$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}6 = \boxed{0{,}9}$$

2) Nos piden la probabilidad condicionada de A respecto de $\bar{B}$, o sea $P(A/\bar{B})$:

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \qquad (1)$$



De $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$, por ser $A \cap \bar{B}$ y $A \cap B$ incompatibles:

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

llevando este valor a (1):

$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}8 - 0{,}6}{1 - 0{,}7} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

14.41 Disponemos de un dado que tiene pintadas las caras de la siguiente forma:

Caras 1, 2, 3, 4 de color verde.
Cara 5 de color rojo.
Cara 6 de colo blanco.

y de dos urnas con la siguiente composición:

Urna I: 6 bolas con brillo, 4 sin brillo.
Urna II: 3 bolas con brillo, 7 sin brillo.

Lanzamos el dado y nos fijamos en el color de la cara:
Si sale verde vamos a la urna I, si sale rojo a la urna II y si sale blanco también a la II.
A continuación extraemos dos bolas una a una sin reemplazamiento. Se pide:

a) Probabilidad de que las dos bolas tengan brillo y que sean de la urna I.
b) Probabilidad de que las dos bolas tengan brillo.

(Univ. Castilla – La Mancha, 1991)

Sea V el suceso "sale cara de color verde al lanzar el dado", R el suceso "sale cara de color rojo", B el suceso "sale cara de color blanco", B_I el suceso las dos bolas que se sacan de la urna I tienen brillo" y B_{II} el suceso "las dos bolas que se sacan de la urna II tienen brillo".

a) El suceso "las dos bolas tienen brillo y son de la urna I" es $V \cap B_I$:

$$P(V \cap B_I) = P(V) \cdot P(B_I/V) = \frac{4}{6}\left(\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}\right) = \boxed{\frac{2}{9}}$$

b) El suceso "las dos bolas tienen brillo" es $(V \cap B_I) \cup (R \cap B_{II}) \cup (B \cap B_{II})$, y como los sucesos $V \cap B_I$, $R \cap B_{II}$ y $B \cap B_{II}$ son incompatibles dos a dos:

$$P[(V \cap B_I) \cup (R \cap B_{II}) \cup (B \cap B_{II})] = P(V \cap B_I) + P(R \cap B_{II}) + P(B \cap B_{II}) =$$

$$= P(V) \cdot P(B_I/V) + P(R) \cdot P(B_{II}/R) + P(B) \cdot P(B_{II}/B) =$$

$$= \frac{4}{6}\left(\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}\right) = \frac{120 + 6 + 6}{540} = \frac{132}{540} = \boxed{\frac{11}{45}}$$

14.42 Disponemos de dos monedas, una correcta y otra con dos caras y una urna con diez bolas, cuatro blancas y seis negras. Sacamos dos bolas de la urna, si son del mismo color elegimos la moneda correcta y la lanzamos al aire. En otro caso, elegimos la incorrecta y la lanzamos al aire. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Que las dos bolas sean del mismo color.

b) Obtener cara en el lanzamiento de la moneda.

c) Si el resultado del lanzamiento de la moneda ha sido cruz, hallar la probabilidad de que las dos bolas elegidas sean de distinto color.

(Univ. de Córdoba)

a) Sea B el suceso "las dos bolas son blancas" y N el suceso "las dos bolas son negras". Estos sucesos son incompatibles.

El suceso "las dos bolas son del mismo color" es $B \cup N$.

$$P(B \cup N) = P(B) + P(N) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{2}}{\frac{10 \cdot 9}{2}} + \frac{\frac{6 \cdot 5}{2}}{\frac{10 \cdot 9}{2}} = \frac{12+30}{90} = \frac{42}{90} = \boxed{\frac{7}{15}}$$

b) Sea D el suceso "las dos bolas son de distinto color", C es suceso "obtener cara con la moneda correcta" y E el suceso "obtener cara con la moneda de dos caras".

El suceso "obtener cara" será $T = (B \cap C) \cup (N \cap C) \cup (D \cap E)$.

$$P(T) = P[(B \cap C) \cup (N \cap C) \cup (D \cap E)]$$

y por ser los sucesos $B \cap C$, $N \cap C$ y $D \cap E$ incompatibles dos a dos, y D el suceso contrario del suceso $B \cup N$:

$$P(T) = P(B \cap C) + P(N \cap C) + P(D \cap E) = P(B) \cdot P(C/B) + P(N) \cdot P(C/N) + P(D) \cdot P(E/D) =$$

$$= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{7}{15}\right) \cdot 1 = \frac{7}{30} + \frac{8}{15} = \frac{7+16}{30} = \boxed{\frac{23}{30}}$$

c) Si se ha obtenido cruz es que se ha lanzado la moneda correcta, esto implica que las dos bolas elegidas eran del mismo color, o sea que "sacar las dos bolas de distinto color y cruz en la moneda" es el suceso imposible, la probabilidad pedida es 0.

14.43 Se tienen dos urnas del mismo aspecto exterior. La primera contiene 6 bolas blancas y 8 bolas negras. La segunda, 4 bolas blancas y 3 negras. Una persona se aproxima al azar a una de las urnas y extrae una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?

(Univ. de Madrid)

Sea U_1 el suceso "elegir la primera urna", U_2 el suceso "elegir la segunda urna", B_1 el suceso "sacar bola blanca de la primera urna" y B_2 el suceso "sacar bola blanca de la segunda urna".

El suceso B "elegir una urna y sacar bola blanca" será: $B = (U_1 \cap B_1) \cup (U_2 \cap B_2) \Rightarrow$

$P(B) = P[(U_1 \cap B_1) \cup (U_2 \cap B_2)]$ y por ser incompatibles los sucesos $U_1 \cap B_1$ y $U_2 \cap B_2$:

$$P(B) = P(U_1 \cap B_1) + P(U_2 \cap B_2) = P(U_1) \cdot P(B_1/U_1) + P(U_2) \cdot P(B_2/U_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

14.44 Para efectuar una rifa se tienen dos urnas A y B, tal que cada una de ellas contiene diez bolas numeradas del 0 al 9.

Se extrae una bola de la urna A y se eliminan de la urna B las bolas que tienen una numeración mayor que la bola extraída de la urna A. Seguidamente se extrae una bola de la urna B.

El número ganador se obtiene poniendo en el lugar de las decenas el número de la bola extraída de la urna B y en el lugar de las unidades el número de la bola extraído de la urna A.

a) Hallar la probabilidad de que el número ganador sea el 48.

b) Hallar la probabilidad de que el número ganador sea el 17.

(Univ. de Valladolid, 1991)

a) Sea A el suceso "se extrae de la urna A la bola numerada con el 8", y B el suceso "se extrae de la urna B la bola numerada con el 4":

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{90}}$$

b) Sea C el suceso "se extrae de la urna A la bola numerada con el 7", y D el suceso "se extrae de la urna B la bola numerada con el número 1".

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D/C) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{80}}$$

14.45 Se lanzan dos dados al aire y la suma de los puntos obtenidos es 7.
Hallar la probabilidad de que en uno de los dados aparezca un 1.

(Univ. de Salamanca)

Cada cara del primer dado se combina con cada una de las del segundo dado, habrá $6 \cdot 6 = 36$ casos posibles.

Sea S el suceso "la suma de los puntos obtenidos es 7":

$$S = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

y A el suceso "en uno cualquiera de los dados aparece un 1":

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6,1)\}$$

$$S \cap A = \{(1, 6), (6, 1)\}$$

Nos piden $P(A/S)$:

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

También podíamos haber razonado así: El saber que la suma de los puntos obtenidos es 7, equivale a considerar que los casos posibles son los sucesos elementales que componen el suceso S o sea, 6, y los casos favorables los sucesos elementales del suceso $\{(1, 6), (6, 1)\}$, o sea, 2. De donde:

$$\text{Probabilidad pedida} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

14.46 Se considera el experimento de lanzar una moneda tres veces. Se pide:

1) Construir el espacio muestral.
2) Suponiendo que la moneda está cargada y que la probabilidad de cara es 0,6. ¿Cuales son las probabilidades de los sucesos elementales?
3) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan al menos una cara?

(Univ. de Madrid, 1991)

1) $\Omega = \{(C\,C\,C), (C\,C\,X), (C\,X\,C), (X\,C\,C), (C\,X\,X), (X\,C\,X), (X\,X\,C), (X\,X\,X)\}$

2) Si la probabilidad de cara es 0,6, la probabilidad de cruz es $1-0{,}6 = 0{,}4$, de donde, considerando que el resultado de cada lanzamiento es independiente del resultado de los otros dos:

$P(CCC) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216$; $P(CCX) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}144$; $P(CXC) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}144$;

$P(CXX) = 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}096$; $P(XCC) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}144$; $P(XCX) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}096$;

$P(XXC) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}096$; $P(XXX) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$

3) El suceso contrario del suceso "obtener al menos una cara" es "obtener tres cruces":

$P(XXX) = 0{,}064 \Rightarrow P(\text{obtener al menos una cara}) = 1 - 0{,}064 = \boxed{0{,}936}$

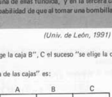
14.47 Se dispone de tres cajas con bombillas. La primera contiene diez bombillas, de las cuales hay cuatro fundidas, en la segunda hay seis bombillas, estando una de ellas fundida, y en la tercera caja hay tres bombillas fundidas de un total de ocho. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar una bombilla al azar de una cualquiera de las cajas, esté fundida?

(Univ. de León, 1991)

Sea A el suceso "se elige la caja A", B el suceso "se elige la caja B", C el suceso "se elige la caja C, y F el suceso "se toma una bombilla fundida".

El suceso "se toma una bombilla fundida de cualquiera de las cajas" es:

$$F = (A \cap F) \cup (B \cap F) \cup (C \cap F)$$



Los sucesos $A \cap F$, $B \cap F$ y $C \cap F$ son incompatibles dos a dos. La probabilidad pedida es:

$$P(F) = P[(A \cap F) \cup (B \cap F) \cup (C \cap F)] =$$

$$= P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) =$$

$$= P(A) \cdot P(F/A) + P(B) \cdot P(F/B) + P(C) \cdot P(F/C) =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{4}{10} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\,\frac{3}{8} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{48+20+45}{5 \cdot 3 \cdot 8} = \boxed{\frac{113}{360}}$$

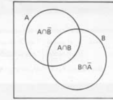
14.48 Conociendo las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0'3 \, , \quad P(B) = 0'5 \quad \text{y} \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0'4$$

calcular $P(B/\overline{A})$ y $P[(A-B)/(A \cup B)]$.

(Univ. de Salamanca)

Según la fórmula de la probabilidad condicionada:



$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B\cap\bar{A})}{1-P(A)} \qquad (1)$$

– de $(A\cap B)\cup(B\cap\bar{A}) = B$, por ser $A\cap B$ y $B\cap\bar{A}$ incompatibles:

$$P[(A\cap B)\cup(B\cap\bar{A})] = P(A\cap B) + P(B\cap\bar{A}) = P(B) \Rightarrow$$

$$P(B\cap\bar{A}) = P(B) - P(A\cap B) \qquad (2)$$

– por las leyes de De Morgan: $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0'4 \Rightarrow$

$$P(\overline{A\cup B}) = 0'4 \Rightarrow P(A\cup B) = 1 - P(\overline{A\cup B}) = 1 - 0'4 = 0'6$$

– de $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow 0'6 = 0'3 + 0'5 - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) = 0'2$

– llevando este último valor a (2): $P(B\cap\bar{A}) = 0'5 - 0'2 = 0'3$

– valor que llevado a (1) nos da: $P(B/\bar{A}) = \dfrac{0'3}{1-0'3} = \dfrac{0'3}{0'7} = \boxed{\dfrac{3}{7}}$

$$P[(A-B)/(A\cup B)] = \frac{P[(A-B)\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)} = \frac{P[(A\cap\bar{B})\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)} = \frac{P(A\cap\bar{B})}{P(A\cup B)}$$

Razonando como anteriormente se obtiene: $P(A\cap\bar{B}) = P(A) - P(A\cap B) = 0'3 - 0'2 = 0'1$

de donde: $P[(A-B)/(A\cup B)] = \dfrac{0'1}{0'6} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$

14.49 Se tienen tres sucesos A, B, C de un experimento aleatorio, con $P(A) = 0'7$, $P(B) = 0'6$, $P(C) = 0'1$, $P(\bar{A}\cup\bar{B}) = 0'58$. Se pide:

a) ¿Son independientes A y B?

b) ¿Cuál es el valor máximo que puede tomar $P(A\cap C)$? Si toma ese valor máximo, calcular $P(\bar{C}/\bar{A})$.

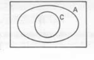
(Univ. de Madrid)

a) $P(\bar{A}\cup\bar{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 0'58 \Rightarrow P(A\cap B) = 1 - 0'58 = 0'42$
$P(A) = 0'7,\ P(B) = 0'6 \Rightarrow P(A)\cdot P(B) = 0'7\cdot 0'6 = 0'42$
$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \Rightarrow$

A y B son independientes.

b) $P(A\cup C) = P(A) + P(C) - P(A\cap C) \Rightarrow P(A\cap C) = P(A) + P(C) - P(A\cup C) \qquad (1)$

esta diferencia será máxima cuando $P(A\cup C)$ sea mínima, y esto ocurrirá cuando $A\cup C$ sea igual a A, o sea cuando el suceso C esté contenido en el suceso A. (No puede ser $A\subset C$ puesto que $P(A) > P(C)$ según el enunciado).



$A\cup C = A \Rightarrow P(A\cup C) = P(A)$, llevando este valor a (1):

$P(A\cap C) = P(A) + P(C) - P(A) = P(C) = \boxed{0'1}$

$C\subset A \Rightarrow \bar{A}\subset\bar{C} \Rightarrow \bar{A}\cap\bar{C} = \bar{A} \Rightarrow P(\bar{C}/\bar{A}) = \dfrac{P(\bar{A}\cap\bar{C})}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(\bar{A})}{P(\bar{A})} = \boxed{1}$

14.50 Se lanza un dado dos veces. Calcular la probabilidad de que en la segunda tirada se obtenga un número menor que en la primera.

(Univ. de Barcelona)

Sean: A_i el suceso "sale el número i en la primera tirada".
M_i el suceso "sale un número menor que i en la segunda tirada".

Nos piden: $P[(A_1 \cap M_1) \cup (A_2 \cap M_2) \cup (A_3 \cap M_3) \cup (A_4 \cap M_4) \cup (A_5 \cap M_5) \cup (A_6 \cap M_6)] =$

(por ser los sucesos $A_1 \cap M_1, \ldots, A_6 \cap M_6$ incompatibles dos a dos)

$$= P(A_1 \cap M_1) + P(A_2 \cap M_2) + P(A_3 \cap M_3) + P(A_4 \cap M_4) + P(A_5 \cap M_5) + P(A_6 \cap M_6) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(M_1/A_1) + P(A_2) \cdot P(M_2/A_2) + P(A_3) \cdot P(M_3/A_3) + P(A_4) \cdot P(M_4/A_4) +$$

$$+ P(A_5) \cdot P(M_5/A_5) + P(A_6) \cdot P(M_6/A_6) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{36}(0+1+2+3+4+5) = \frac{15}{36} = \boxed{\frac{5}{12}}$$

14.51 Se lanzan 7 bolas en 3 cajas A, B y C, de modo que cada bola tenga la misma probabilidad de caer en cualquier caja.

1º) ¿Cuál es la probabilidad de que A quede sin bola?
2º) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna caja quede sin bola?
3º) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las cajas tengan bola?

(Univ. de Alicante)

1º) Sea A el suceso "la caja A queda sin bola".

Los casos posibles son 3^7, puesto que la primera bola puede caer en cualquiera de las tres cajas. La segunda bola puede caer en cualquier de las tres cajas, estos tres casos se pueden combinar con cada uno de los tres primeros, formando 3×3 maneras distintas de caer las dos primeras bolas. Así, con cada uno de los tres casos de caer las bolas tercera, cuarta, quinta, sexta y séptima, se tienen 3^7 casos posibles.

Los casos favorables al suceso A son 2^7: Cada bola puede caer o en la caja B o en la caja C, o sea, de dos maneras distintas, combinándose cada dos maneras de cada bola con las dos maneras de las restantes.

$$P(A) = \frac{2^7}{3^7} = \boxed{\frac{128}{2187}}$$

2º) Sean B el suceso "la caja B queda sin bola" y C el suceso "la caja C queda sin bola".

El suceso "alguna caja queda sin bola" es igual a $A \cup B \cup C$:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2^7}{3^7}$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{3^7}$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

$\Rightarrow$

$$P(A \cup B \cup C) = 3 \cdot \frac{2^7}{3^7} - 3 \cdot \frac{1}{3^7} = \frac{2^7 - 1}{3^6} = \boxed{\frac{127}{729}}$$

3º) El suceso D: "todas las cajas tienen bola" es el suceso contrario del suceso "alguna caja queda sin bola":

$$P(D) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{2^7 - 1}{3^6} = \frac{3^6 - 2^7 + 1}{3^6} = \boxed{\frac{602}{729}}$$

14.52 Un problema debe ser resuelto por tres alumnos. La probabilidad de que lo resuelva el primero es de $\frac{1}{2}$ y la de que lo logre el segundo $\frac{1}{3}$. Además, la probabilidad condicionada de que lo resuelva el segundo sabiendo que lo ha resuelto el primero es $\frac{2}{3}$. Se pide:

a) Probabilidad de que lo resuelvan el primero y el segundo.
b) Probar que siempre que el segundo alumno resuelve el problema, también lo resuelve el primero.
c) Sabiendo que siempre que el segundo y el primer alumno resuelven el problema, también lo resuelve el tercero, calcular la probabilidad de que los tres resuelvan el problema.

(Univ. de Alicante, 1991)

a) Sea A el suceso "resuelve el problema el primer alumno", B "lo resuelve el segundo" y C "lo resuelve el tercero".

Se sabe que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(B/A) = \frac{2}{3}$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

b) El primer alumno resolverá el problema siempre que lo resuelva el segundo si $P(A/B) = 1$.

Del enunciado y de a) se sabe que $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

c) Si el tercer alumno resuelve el problema siempre que lo resuelven el primero y el segundo, se verifica que $P(C/A \cap B) = 1$.

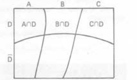
$$P(A \cap B \cap C) = P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B) \cdot P(C/A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

14.53 Tres máquinas A, B, C fabrican tornillos del mismo tipo. Los porcentajes de defectuosos en cada máquina son respectivamente 1%, 2% y 3%. Se mezclan 120 tornillos: 20 de la máquina A, 40 de la B y 60 de la C. Elegido uno al azar resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

(Univ. de Alicante, 1991)

Sean A, B y C, respectivamente los sucesos de que los tornillos sean fabricados por las máquinas A, B y C, y D el suceso de que un tornillo sea defectuoso y $\bar{D}$ de que no sea defectuoso. Los sucesos A, B y C son incompatibles dos a dos, así como los sucesos D y $\bar{D}$.

El saber que el tornillo elegido es defectuoso equivale a restringir el universo a los tornillos defectuosos, y los casos favorables a que haya sido fabricado por la máquina B (sabiendo que es defectuoso) son los del suceso $B \cap D$:



$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B \cap D)}{P[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)]} =$$

$$= \frac{P(B \cap D)}{P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)} =$$

$$= \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{\frac{40}{120} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{20}{120} \cdot \frac{1}{100} + \frac{40}{120} \cdot \frac{1}{100} + \frac{60}{120} \cdot \frac{3}{100}} = \frac{80}{20 + 80 + 180} = \frac{80}{280} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

14.54 Una compañía dedicada al transporte público explota tres líneas periféricas de una gran ciudad con arreglo al siguiente reparto de recursos: el 60% de los autobuses cubre el servicio de la primera línea, el 30% cubre el servicio de la segunda línea y el 10% el de la tercera línea. Un estudio del Ayuntamiento permite saber que la probabilidad de que, diariamente, un autobús sufra una avería es del 2% en la primera línea, del 4% en la segunda línea y del 1% en la tercera línea.

a) Calcular la probabilidad de que, en un día, un autobús, sufra avería.

b) Sabiendo que un autobús ha sufrido avería, hallar la probabilidad de que haga la ruta de la primera línea.

(Univ. de Salamanca, 1991)

a) Sea A el suceso "el autobús elegido es de la primera línea", B "el autobús es de la segunda línea", C "el autobús es de la tercera línea" y D "el autobús elegido se avería".

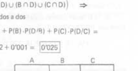
$$D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D) \;\Rightarrow\; P(D) = P\big((A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)\big) \;\Rightarrow$$

por ser los sucesos $A \cap D$, $B \cap D$ y $C \cap D$ incompatibles dos a dos

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0'6 \cdot 0'02 + 0'3 \cdot 0'04 + 0'1 \cdot 0'01 = 0'012 + 0'012 + 0'001 = \boxed{0'025}$$

b) Suponer que el autobús ha sufrido una avería equivale a restringir el universo al suceso D, o lo que es lo mismo, los casos posibles son los sucesos elementales de suceso D, y los casos favorables de que el autobús pertenezca a la primera línea son los sucesos elementales de $A \cap D$:



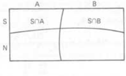
$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0'6 \cdot 0'02}{0'025} =$$

$$= \frac{0'012}{0'025} = \frac{12}{25} = \boxed{0'48}$$

14.55 En un sistema de alarma, la probabilidad de que haya un incidente es de 0,1. Si éste se produce la probabilidad de que la alarma suene es 0,95. La probabilidad de que funcione la alarma sin que haya incidente es de 0,03. Si ha funcionado la alarma, calcular la probabilidad de que no haya habido incidente.

(Univ. de las Islas Baleares, 1991)

Sea A el suceso "ha habido un incedente" y B el suceso "no ha habido un incidente". S el suceso "la alarma suena" y N "la alarma no suena".



El saber que ha funcionado la alarma equivale a restringir el universo al suceso S, y los casos favorable al suceso a que no haya habido incidente a S∩B:

$$P(B/S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B \cap S)}{P[(S \cap A) \cup (S \cap B)]} =$$

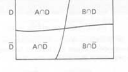
$$= \frac{P(B \cap S)}{P(S \cap A) + P(B \cap S)} = \frac{P(B) \cdot P(S/B)}{P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}03}{0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}03} =$$

$$= \frac{27}{95 + 27} = \boxed{\frac{27}{122}}$$

14.56 Las probabilidades de que cierto artículo esté fabricado por las máquinas A y B, son 0,7 y 0,3 respectivamente. La máquina A produce artículos defectuosos con probabilidad 0,02 y la B con probabilidad 0,06. Se observa un artículo y resulta ser defectuoso. Hallar la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina A.

(Univ. de Alicante)

Saber que el artículo es defectuoso equivale a limitar los casos posibles a los artículos defectuosos Los casos favorables a ser fabricados por la máquina A sabiendo que son defectuosos son los del suceso A ∩ D:



$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A \cap D)}{P[A \cap D) \cup (B \cap D)]} =$$

$$= \frac{P(A \cap D)}{P(A \cap D) + P(B \cap D)} =$$

$$= \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}02}{0{,}7 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}06} = \frac{14}{14 + 18} = \frac{14}{32} = \boxed{\frac{7}{16}}$$

14.57 En una estantería hay 60 novelas y 20 libros de poesía. Una persona A elige un libro al azar de la estantería y se lo lleva. A continuación otra persona B elige otro libro al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por B sea una novela?

b) Si se sabe que B eligió una novela, ¿cuál es la probabilidad de que el libro seleccionado por A sea de poesía?

(Univ. de Oviedo)

a) Sean: A_N el suceso "A elige un libro de novela", A_P "A elige un libro de poesía" y B_N "B elige un libro de novela". Nos piden la probabilidad del suceso $(A_N \cap B_N) \cup (A_P \cap B_N)$, siendo $A_N \cap B_N$ y $A_P \cap B_N$ sucesos incompatibles:

$$P[(A_N \cap B_N) \cup (A_P \cap B_N)] = P(A_N \cap B_N) + P(A_P \cap B_N) = P(A_N) \cdot P(B_N/A_N) + P(A_P) \cdot P(B_N/A_P) =$$

$$= \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79} = \frac{4740}{6320} = \boxed{\frac{237}{316}}$$

b) El saber que B eligió novela equivale a restringir el espacio muestral al suceso:

$(A_N \cap B_N) \cup (A_P \cap B_N)$, y el suceso de los casos favorables a que A haya seleccionado un libro de poesía al suceso $A_P \cap B_N$:

$$P(A_P/B_N) = \frac{P(A_P \cap B_N)}{P[(A_N \cap B_N) \cup (A_P \cap B_N)]} = \frac{P(A_P) \cdot P(B_N/A_P)}{P(A_N) \cdot P(B_N/A_N) + P(A_P) \cdot P(B_N/A_P)} =$$

$$= \frac{\frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79}}{\frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79}} = \frac{1200}{4740} = \boxed{\frac{60}{237}}$$

14.58 Un estudiante cuenta, para un examen, con la ayuda de un despertador, el cual consigue despertarlo en un 80% de los casos. Si oye el despertador, la probabilidad de que realice el examen es 0,9 y, en caso contrario, de 0,5.

a) Si realiza el examen, ¿cuál es la probabilidad de que haya oído el despertador?

b) Si no realiza el examen, ¿cuál es la probabilidad de que no haya oído el despertador?

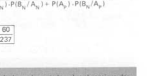
(Univ. de las Islas Baleares)

Sea D el suceso: "oye el despertador", y $\bar{D}$ "no oye el despertador": $P(D) = 0{,}8 \Rightarrow P(\bar{D}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Sea E el suceso: "realiza el examen", y $\bar{E}$ "no realiza el examen".

$$P(E/D) = 0{,}9 \Rightarrow P(\bar{E}/D) = 0{,}1$$

$$P(E/\bar{D}) = 0{,}5 \Rightarrow P(\bar{E}/\bar{D}) = 0{,}5$$



a) Si realiza el examen, los casos posibles quedan reducidos al suceso E y los casos favorables a que haya oído el despertador a $(D \cap E)$:

$$P(D/E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{P(D \cap E)}{P[(D \cap E) \cup (\bar{D} \cap E)]} =$$

$$= \frac{P(D \cap E)}{P(D \cap E) + P(\bar{D} \cap E)} = \frac{P(D) \cdot P(E/D)}{P(D) \cdot P(E/D) + P(\bar{D}) \cdot P(E/\bar{D})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}9}{0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}5} = \frac{72}{82} = \boxed{\frac{36}{41}}$$

b) $$P(\bar{D}/\bar{E}) = \frac{P(\bar{D} \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(\bar{D} \cap \bar{E})}{P[(D \cap \bar{E}) \cup (\bar{D} \cap \bar{E})]} = \frac{P(\bar{D}) \cdot P(\bar{E}/\bar{D})}{P(D) \cdot P(\bar{E}/D) + P(\bar{D}) \cdot P(\bar{E}/\bar{D})} =$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}5} = \frac{10}{18} = \boxed{\frac{5}{9}}$$

14.59 Un armario tiene dos cajones. El cajón nº 1 contiene 4 monedas de oro y 2 de plata. El cajón nº 2 contiene 3 monedas de oro y 3 de plata. Se abre un cajón al azar y se extrae una moneda. Calcular:

a) Probabilidad de que se haya abierto el cajón nº 2 y se haya extraído una moneda de oro.
b) Probabilidad de que se haya abierto el cajón nº 1, sabiendo que se ha extraído una moneda de oro.

(Univ. de Valladolid)

a) Sea A el suceso "se abre el cajón número 1", B el suceso "se abre el cajón número 2", O el suceso "se extrae una moneda de oro" y N el suceso "se extrae una moneda de plata".

$$P(B \cap O) = P(B) \cdot P(O/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

b) El saber que se ha extraído una moneda de oro equivale a reducir el espacio muestral al suceso $(A \cap O) \cup (B \cap O)$, y el suceso de los casos favorables a abrir el cajón número 1 sabiendo que se ha extraído una moneda de oro al suceso $A \cap O$:

$$P(A/O) = \frac{P(A \cap O)}{P[(A \cap O) \cup (B \cap O)]}$$

y por ser los sucesos $A \cap O$ y $B \cap O$ incompatibles:

$$P(A/O) = \frac{P(A \cap O)}{P(A \cap O) + P(B \cap O)} = \frac{P(A) \cdot P(O/A)}{P(A) \cdot P(O/A) + P(B) \cdot P(O/B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6}} = \frac{4}{4+3} = \boxed{\frac{4}{7}}$$

14.60 En una casa hay tres llaveros A, B y C, el primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir el trastero. Se pide:

a) ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?
b) ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?
c) Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A?

(Univ. de La Laguna – Tenerife)

Sean A, B y C los sucesos: "se elige el llavero A", "se elige el llavero B" y "se elige el llavero C", y S el suceso "se elige la llave que abre el trastero".

a) Se acertará con la llave si se realiza el suceso $T = (A \cap S) \cup (B \cap S) \cup (C \cap S)$, de donde:

$$P(T) = P[(A \cap S) \cup (B \cap S) \cup (C \cap S)]$$

y por ser los sucesos $A \cap S$, $B \cap S$ y $C \cap S$ incompatibles dos a dos:

$$P(T) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7 \cdot 8 + 5 \cdot 8 + 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{56 + 40 + 35}{840} = \boxed{\frac{131}{840}}$$

b) $P(C \cap \bar{S}) = P(C) \cdot P(\bar{S}/C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = \boxed{\frac{7}{24}}$

c) El saber que la llave escogida es la correcta equivale a restringir el espacio muestral al suceso T, y el suceso de los casos favorables a que la llave pertenezca al llavero A al suceso $A \cap S$:

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(T)} = \frac{P(A) \cdot P(S/A)}{P(T)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{131}{840}} = \frac{840}{15 \cdot 131} = \boxed{\frac{56}{131}}$$

14.61 Suponiendo que la riqueza es independiente del sexo, calcular:

a) Las probabilidades que faltan en la tabla

	Rico/a	Pobre	Total
Hombre	—	—	0,607
Mujer	—	—	0,393
Total	0,002	—	

b) La probabilidad de que sabiendo que una persona no es pobre que sea hombre.

c) La probabilidad de que una persona sea rica o mujer.

(Univ. de Córdoba, 1991)

a) Sea H el suceso "la persona es hombre", M "es mujer", R "es rica" y $\overline{R}$ "es pobre".

Los sucesos R y $\overline{R}$ son contrarios: $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0{,}002 = \underline{0{,}998}$

Por ser la riqueza independiente del sexo: H es independiente de R y $\overline{R}$, y M es independiente de R y $\overline{R}$:

$P(H \cap R) = P(H) \cdot P(R) = 0{,}607 \cdot 0{,}002 = \underline{0{,}001214}$

$P(M \cap R) = P(M) \cdot P(R) = 0{,}393 \cdot 0{,}002 = \underline{0{,}000786}$

$$\left.\begin{array}{l} H = (H \cap R) \cup (H \cap \overline{R}) \\ H \cap R \text{ y } H \cap \overline{R} \text{ incompatibles} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} P(H) = P(H \cap R) + P(H \cap \overline{R}) \Rightarrow \\ 0{,}607 = 0{,}001214 + P(H \cap \overline{R}) \Rightarrow P(H \cap \overline{R}) = \underline{0{,}605786} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} M = (M \cap R) \cup (M \cap \overline{R}) \\ M \cap R \text{ y } M \cup \overline{R} \text{ incompatibles} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} P(M) = P(M \cap R) + P(M \cap \overline{R}) \Rightarrow \\ 0{,}393 = 0{,}000786 + P(M \cap \overline{R}) \Rightarrow P(M \cap \overline{R}) = \underline{0{,}392214} \end{array}$$

El cuadro de probabilidades será:

	R	$\overline{R}$	Total
H	0,001214	0,605786	0,607
M	0,000786	0,392214	0,393
Total	0,002	0,998	

b) Si una persona no es pobre es que es rica. Saber que una persona es rica equivale a restringir el universo al suceso R, y los sucesos favorables al suceso de que sea hombre sabiendo que es rica quedan reducidos a los sucesos elementales de $H \cap R$:

$$P(H/R) = \frac{P(H \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}001214}{0{,}002} = \boxed{0{,}607}$$

c) $P(R \cup M) = P(R) + P(M) - P(R \cap M) = 0{,}002 + 0{,}393 - 0{,}00786 = \boxed{0{,}38714}$

14.62 Una compañía de seguros hace una investigación sobre la cantidad de partes de siniestro fraudulentos presentados por sus asegurados. Clasificando los seguros en tres clases: incendio, automóviles, y "otros", se obtiene la siguiente relación de datos:

El 6% son partes por incendio fraudulentos; el 1% son partes de automóvil fraudulentos; el 3% son "otros" partes fraudulentos; el 14% son partes por incendio no fraudulentos; el 29% son partes por automóvil no fraudulentos; y el 47% son "otros" partes no fraudulentos.

a) Haz una tabla ordenando los datos anteriores, hallando el porcentaje total de partes fraudulentos y no fraudulentos.

b) Calcula qué porcentaje total de partes corresponde a la rama de incendios, cuál a la automóviles y cuál a "otros". Añade estos datos a la tabla.

c) Calcular la probabilidad de que un parte escogido al azar sea fraudulento. ¿Cuál será en cambio la probabilidad de que sea fraudulento si se sabe que es de la rama de incendios?

(Univ. de Cantabria, 1992)

Sea F el suceso "el siniestro es fraudulento", B " no es fraudulento", I "el seguro es de incendios", A "es de automóviles" y O "de otros".

a)

	I	A	O	
F	6%	1%	3%	10%
B	14%	29%	47%	90%

De la tabla adjunta resulta que el 10% de los partes son fraudulentos y el 90% no son fraudulentos.

b)

	I	A	O	
F	6%	1%	3%	10%
B	14%	29%	47%	90%
	20%	30%	50%	

c) $P(F) = \frac{10}{100} = \boxed{0,1}$; $P(F/I) = \frac{P(F \cap I)}{P(I)} = \frac{\frac{6}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{6}{20} = \boxed{0,3}$

14.63 En un hospital se hace un estudio del tipo de emergencias que se presentan, distinguiendo si corresponden al turno de día o al de noche, y agrupándolos en cuatro grupos: ataque cardíaco, accidente laboral, accidente de automóvil, y "otros", obteniéndose los siguientes resultados:

	At. Card.	Acc. Lab.	Acc. Aut.	Otros
T. Diurno	12%	4%	9%	35%
T. Nocturno	8%	6%	11%	15%

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que llega a urgencias haya sufrido un ataque cardíaco o un accidente laboral?

b) Suponiendo que se trata del turno diurno, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de un accidente de automóvil?

c) Mostrar que los ataques cardíacos son independientes del turno de trabajo, y los accidentes de automóvil no lo son.

(Univ. de Cantabria, 1992)

Sea C el suceso "una persona sufre ataque cardiaco", L "sufre accidente laboral", A "sufre accidente de automóvil", O "sufre otros accidentes", D "se presenta en el turno de día" y N "se presenta en el turno de noche.

Los sucesos C, L, A y O son incompatibles dos a dos, y los sucesos D y N son incompatibles.

	C	L	A	O	
D	12%	4%	9%	35%	60%
N	8%	6%	11%	15%	40%
	20%	10%	20%		

a) $P(C \cup L) = P(C) + P(L) = \frac{20}{100} + \frac{10}{100} = \boxed{0{,}3}$

b) $P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{60}{100}} = \frac{9}{60} = \boxed{0{,}15}$

c) $\left.\begin{array}{l} P(C \cap D) = \frac{12}{100} = 0{,}12 \\ P(C) \cdot P(D) = \frac{20}{100} \cdot \frac{60}{100} = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12 \end{array}\right\} \Rightarrow P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) \Rightarrow$ C y D son independientes

$\left.\begin{array}{l} P(C \cap N) = \frac{8}{100} = 0{,}08 \\ P(C) \cdot P(N) = \frac{20}{100} \cdot \frac{40}{100} = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08 \end{array}\right\} \Rightarrow P(C \cap N) = P(C) \cdot P(N) \Rightarrow$ C y N son independientes

$\left.\begin{array}{l} P(A \cap D) = \frac{9}{100} = 0{,}09 \\ P(A) \cdot P(D) = \frac{20}{100} \cdot \frac{60}{100} = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap D) \neq P(A) \cdot P(D) \Rightarrow$ A y D no son independientes

$\left.\begin{array}{l} P(A \cap N) = \frac{11}{100} = 0{,}11 \\ P(A) \cdot P(N) = \frac{20}{100} \cdot \frac{40}{100} = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap N) \neq P(A) \cdot (N) \Rightarrow$ A y N no son independientes

14.64 Utilizar la fórmula

$$P(A) = P(B) \cdot P(A/B) + P(\text{no } B) \cdot P(A/\text{no } B)$$

para calcular la probabilidad de que cierto alumno apruebe un examen si sabemos que, habiendo estudiado, puede aprobar con probabilidad 0,9; que si no ha estudiado, puede aprobar con probabilidad 0,2; y que estudia para la mitad de sus exámenes.

(Univ. de Barcelona, 1992)

Sea A el suceso "aprueba el examen", y B el suceso "estudia para el examen".

Según el enunciado: $P(A/B) = 0{,}9$; $P(A/\text{no } B) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}5 \Rightarrow P(\text{no } B) = 1 - P(B) =$ $= 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

Sustituyendo estos valores en la fórmula dada:

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}45 + 0{,}1 = \boxed{0{,}55}$$

14.65 En una clase, el 40% aprueba Filosofía y el 50% aprueba Matemáticas. Además, la probab lidad de aprobar la Filosofía habiendo aprobado Matemáticas es 0,8.

Probar que la mitad de la clase suspende ambas asignaturas y calcular el porcentaje de alumnos qu teniendo aprobada la Filosofía, aprueba también las Matemáticas.

(Univ. de Alicante, 1992)

Sea F el suceso "aprueba la Filosofía", y M el suceso "aprueba las Matemáticas". El suceso $\bar{F}$ "suspende la Filosofía" y $\bar{M}$ es el suceso "suspende las Matemáticas".

Según el enunciado: $P(F) = 0,4$; $P(M) = 0,5$; $P(F/M) = 0,8$.

$$P(F/M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = 0,8 \Rightarrow P(F \cap M) = 0,8 \cdot P(M) = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4$$

$$P(\bar{F} \cap \bar{M}) = P(\overline{F \cup M}) = 1 - P(F \cup M) = 1 - [P(F) + P(M) - P(F \cap M)] = 1 - (0,4 + 0,5 - 0,4) = 0,$$

$\Rightarrow$ la mitad de la clase suspende ambas asignaturas.

$$P(M/F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0,4}{0,4} = 1 \Rightarrow$$ el 100% de los que aprueban la Filosofía aprueban tamb las Matemáticas (todos los que aprueban la Filosofía aprueban las Matemáticas).

14.66 En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se extrae al azar una bola y se repite proceso dos veces más, obteniéndose los números b y c. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ 2x + 3y \quad &= 0 \end{aligned}\right\}$$

sea incompatible?

(Univ. de Murcia, 1992)

El sistema es incompatible si al aplicar el método de Gauss resulta alguna ecuación absurda (de p mer miembro nulo y el segundo miembro distinto de cero):

$$\left.\begin{aligned} (1) \quad & ax + by = -c \\ (2) \quad & 2x + 3y = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} (1) \quad & & ax + \quad by &= -c \\ (2') = a \cdot (2) - 2 \cdot (1) \quad & & (3a - 2b)\, y &= 2c \end{aligned}\right\}$$

el sistema será incompatible si $(3a - 2b) = 0$ y $c \neq 0$, pues (2') sería una ecuación absurda:

$$3a - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{3a}{2} \Rightarrow$$ (al ser a y b números naturales del 1 al 10) sólo existen soluciones:

$$a = 2,\ b = 3; \quad a = 4,\ b = 6; \quad a = 6,\ b = 9$$

Como en la tercera extración siempre saldrá un número de 1 al 10, c será distinto de 0.

Si por (a, b) representamos: sale a en la primera extracción y b en la segunda, el sistema será compatible sólo si se dan los casos (2,3), (4, 6) y (6, 9). Estos son los casos favorables. Los casos sibles son $10 \cdot 10 = 100$, pues cada uno de los 10 valores que puede tomar a se combina con cada u de los 10 valores que puede tomar b.

$$\text{Probabilidad pedida} = \boxed{\frac{3}{100}}$$

14.67 Se tienen dos urnas que contienen 4 bolas verdes y 6 negras la primera, y 2 verdes y 4 negras la segunda. Se procede a sacar 3 bolas de la primera, a introducirlas en la segunda y a sacar a continuación 2 bolas de esta última urna.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color las 5 bolas extraidas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que 4 sean verdes y 1 negra?
c) Si las bolas extraidas han sido 4 verdes y 1 negra, ¿cuál es la probabilidad de que las 3 extraidas de la primera urna sean verdes?

(Univ. de Navarra, 1992)

Sea A_{iV} el suceso "se sacan i bolas verdes de la primera urna".

A_{iN} " " " " i " negras " " " "

$A_{iV,jN}$ el suceso "se sacan i bolas verdes y j negras de la primera urna"

B_{iV} el suceso "se sacan i bolas verdes de la segunda urna".

B_{iN} " " " " i " negras " " " "

$B_{iV,jN}$ el suceso "se sacan i bolas verdes y j negras de la segunda urna.

a) El suceso "las 5 bolas son del mismo color" es: $C = (A_{3V} \cap B_{2V}) \cup (A_{3N} \cap B_{2N})$

y por ser los sucesos entre paréntesis incompatibles:

$$P(C) = P(A_{3V} \cap B_{2V}) + P(A_{3N} \cap B_{2N}) = P(A_{3V}) \cdot P(B_{2V}/A_{3V}) + P(A_{3N}) \cdot P(B_{2N}/A_{3N}) =$$

$$= \frac{\binom{4}{3}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}\binom{9}{2}} + \frac{\binom{6}{3}\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}\binom{9}{2}} = \frac{4}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}} \cdot \frac{\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}}{\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}} + \frac{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}} \cdot \frac{\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}}{\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}} = \frac{1}{30} \cdot \frac{5}{18} + \frac{5}{30} \cdot \frac{7}{12} = \boxed{\frac{23}{216}}$$

b) Se podrán sacar 4 bolas verdes y 1 negra de cualquiera de las siguientes maneras: O bien sacando de la primera urna 2 verdes y 1 negra y de la segunda urna 2 verdes, o bien sacando de la primera urna 3 verdes y de la segunda urna 1 verde y 1 negra. El suceso "sacar 4 bolas verdes y 1 negra" es:

$$D = (A_{2V,1N} \cap B_{2V}) \cup (A_{3V} \cap B_{1V,1N})$$

y por ser los sucesos entre paréntesis incompatibles:

$$P(D) = P(A_{2V,1N} \cap B_{2V}) + P(A_{3V} \cap B_{1V,1N}) = P(A_{2V,1N}) \cdot P(B_{2V}/A_{2V,1N}) + P(A_{3V}) \cdot P(B_{1V,1N}/A_{3V}) =$$

$$= \frac{\binom{4}{2} \cdot 6}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{5 \cdot 4}{\binom{9}{2}} = \frac{\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot 6}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}} \cdot \frac{\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}}{\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}} + \frac{4}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}} \cdot \frac{20}{\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{10 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 3}{9 \cdot 4} + \frac{4}{10 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{20}{9 \cdot 4} = \frac{27}{30 \cdot 18} + \frac{10}{30 \cdot 18} = \frac{37}{30 \cdot 18} = \boxed{\frac{37}{540}}$$

c) $$P\left((A_{3V} \cap B_{1V,1N})/D\right) = \frac{P\left((A_{3V} \cap B_{1V,1N}) \cap D\right)}{P(D)} =$$

como $(A_{3V} \cap B_{1V,1N}) \subset D$, y por el apartado anterior: $$= \frac{P(A_{3V} \cap B_{1V,1N})}{P(D)} = \frac{\frac{10}{30 \cdot 18}}{\frac{37}{540}} = \boxed{\frac{10}{37}}$$

CAPITULO 15

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA DISTRIBUCION BINOMIAL

VARIABLE ALEATORIA.

Sea $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ un espacio de probabilidad y R el conjunto de los números reales.

Se llama **variable aleatoria** a toda aplicación X de Ω en R tal que la imagen inversa de cada int valo de la forma $]-\infty, x]$ sea un suceso del espacio probabilístico $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$, o sea un elemento de.

$$\begin{aligned} &\Omega \xrightarrow{X} R \\ &\omega \longmapsto X(\omega) = x \end{aligned} \quad ; \quad X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathscr{A}$$

Esta expresión se suele simbolizar por $\{\omega / X(\omega) \leqslant x\}$ o bien por $\{X \leqslant x\}$.

Idéntico significado tienen las expresiones $\{X < x\}$, $\{X \geqslant x\}$, $\{X > x\}$, $\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}$.

Al conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria $X = X(\omega)$, cuando ω toma todos valores de Ω, se llama *conjunto de valores* o *espacio muestral* de la variable aleatoria X. Se simboli por $X(\Omega)$.

A la expresión "variable aleatoria" X, lo mismo que al vocablo "función" se le atribuyen dos se tidos diferentes: por una parte, indica la aplicación de Ω en R, y por otra, los valores reales particul res que toma $X(\omega)$.

Sea el experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente dos dados y considerar los números de las ca superiores.

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), \ldots, (6,2), (6,1)\}$$

$$\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega).$$

La aplicación $X: \Omega \to R$, tal que a cada resultado se le hace corresponder la suma de los números superiores es u variable aleatoria.

El conjunto de valores de la variable aleatoria va desde 2, correspondiente al resultado (1,1), al 12, correspondie te al resultado (6,6):

$$X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$\{X \leqslant 2\} = \{1,1\}\ ; \ \{X \leqslant 3\} = \{(1,1), (1,2), (2,1\}\ ; \ \{X \leqslant 4\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1)\}$$

$$\{X = 5\} = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}\ ; \ \{X \geqslant 11\} = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}.$$

Función o distribución de probabilidad de la variable aleatoria X. Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ los elementos de $X(\Omega)$, tales que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. La función $f: X(\Omega) \longrightarrow R$ definida por la fórmula

$$f(x) = P[X^{-1}(x)]$$

se llama función o distribución de probabilidad de la variable aleatoria X. O lo que es lo mismo, se llama distribución de probabilidad de una variable aleatoria al conjunto de los valores que puede tomar ésta, acompañada de sus respectivas probabilidades.

En el ejemplo anterior, los casos posibles al lanzar dos dados son 6·6 = 36. Los casos favorables a que la suma sea 2 es 1, resultado (1,1); los casos favorables a que la suma sea 3 son 2, resultados (1,2) y (2,1); los casos favorables a que la suma sea 4 son 3, resultados (1,3), (2,2) y (3,1); . . . ; los casos favorables a que la suma sea 12 es 1, resultado (6,6). De aquí la función de probabilidad es:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i = f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Función de distribución. Se llama así a la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor igual o menor que x:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

o lo que es igual:

$$F(x) = P(-\infty < X \leq x)$$

Se lanzan simultáneamente dos dados y se considera la variable aleatoria consistente en sumar las puntuaciones obtenidas. Encontar su función de probabilidad y su función de distribución.

(Univ. de Murcia, 1992)

La función de probabilidad está determinada en el último ejemplo. A partir de la función de probabilidad obtenemos la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X < 2 \\ \frac{1}{36} & \text{si} \quad 2 \leq X < 3 \\ \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36} & \text{si} \quad 3 \leq X < 4 \\ \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} & \text{si} \quad 4 \leq X < 5 \\ \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36} & \text{si} \quad 5 \leq X < 6 \\ \frac{10}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36} & \text{si} \quad 6 \leq X < 7 \\ \frac{15}{36} + \frac{6}{36} = \frac{21}{36} & \text{si} \quad 7 \leq X < 8 \\ \frac{21}{36} + \frac{5}{36} = \frac{26}{36} & \text{si} \quad 8 \leq X < 9 \\ \frac{26}{36} + \frac{4}{36} = \frac{30}{36} & \text{si} \quad 9 \leq X < 10 \\ \frac{30}{36} + \frac{3}{36} = \frac{33}{36} & \text{si} \quad 10 \leq X < 11 \\ \frac{33}{36} + \frac{2}{36} = \frac{35}{36} & \text{si} \quad 11 \leq X < 12 \\ \frac{35}{36} + \frac{1}{36} = 1 & \text{si} \quad 12 \leq X \end{cases}$$

La función de distribución cumple las siguientes propiedades:

1º $F(+\infty) = 1$

2º $F(-\infty) = 0$

3º $P(x < X \leq x + h) = F(x + h) - F(x)$

4º La función de distribución es monótona no decreciente:

$$F(x) \leq F(x + h) \quad \text{si} \quad x < x + h$$

5º La función de distribución es siempre continua por la derecha.

VARIABLE ALEATORIA DISCRETA. Una variable aleatoria es discreta si sólo puede tomar un número finito de valores (o infinito, pero numerable).

La función de probabilidad queda definida por la tabla:

X	x_1	$x_2 \ldots x_n$
p_i	p_1	$p_2 \ldots p_n$

Gráficamente, podemos representar la función de probabilidad discreta por el diagrama de barras, polígono de probabilidad y gráfico acumulativo de probabilidad.

Media o esperanza matemática de una variable aleatoria discreta:

$$\boxed{\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n}$$

Varianza de una variable aleatoria discreta:

$$\boxed{\sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n}$$

que es igual a:

$$\boxed{\sigma^2 = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \cdots + x_n^2 \cdot p_n - \mu^2}$$

Sea la siguiente distribución de probabilidad:

X	1	2	4	5
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

X_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$
1	0,2	0,2	1	0,2
2	0,4	0,8	4	1,6
4	0,3	1,2	16	4,8
5	0,4	0,5	25	2,5
		2,7		9,3

$\mu = 2,7$

$\sigma^2 = 9,3 - (2,7)^2 = 9,3 - 7,29 = 2,01$

DISTRIBUCION BINOMIAL.

Sea un experimento aleatorio en el que se verifican estas hipótesis :

- el resultado de cada prueba pertenece a uno de estos dos sucesos: A o $\bar{A}$.
- la probabilidad del suceso A es la misma en cada prueba
- los resultados de cada prueba son independiente entre sí

Si p es la probabilidad del suceso A en una sola prueba y $q = 1 - p$ es la probabilidad del suceso $\bar{A}$ en una sola prueba, la probabilidad de que el suceso A se presente exactamente x veces en n pruebas (y no se presente en las n–x pruebas restantes) es:

$$\boxed{P = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}}$$

Esta fórmula se conoce con el nombre de *fórmula de Bernouilli*.
La distribución binomial se simboliza por B(n, p).

Un bar dispone de cervezas y refrescos. La probabilidad de que un cliente pida una cerveza es $\frac{2}{3}$ y la probabilidad de que pida un refresco es $\frac{1}{3}$. Si son atendidos 20 clientes. ¿Cual es la probabilidad de que 14 pidan una cerveza y 6 un refresco?.

(Univ. de Valladolid, 1991)

Se tiene una probabilidad binomial, en la que $p = \frac{2}{3}$, $q = 1 - p = \frac{1}{3}$, $n = 20$ y $x = 14$:

$$P = \binom{20}{14} \left(\frac{2}{3}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \binom{20}{6} \frac{2^{14}}{3^{20}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \, \frac{2^{14}}{3^{20}} = 0{,}182$$

Media o esperanza matemática de una distribución binomial:

$$\boxed{\mu = n \cdot p}$$

En el ejemplo anterior, la media o esperanza matemática es $\mu = 20 \cdot \frac{2}{3} = 13{,}33 \approx 13$.

De los 20 clientes cabe esperar que 13 pidan una cerveza.

Varianza de una distribución binomial:

$$\boxed{\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p)}$$

En el ejemplo anterior, la varianza es: $\sigma^2 = 20 \frac{2}{3} \frac{1}{3} = 4{,}44$

PROBLEMAS

15.1 Explica cuál es la fórmula de la probabilidad de que al lanzar 3 monedas bien construidas se obtengan x caras. Supongamos ahora que se han lanzado tres monedas bien construidas. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1 cara?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?

c) Si sabemos que se ha obtenido un número impar de caras, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenido sea 1?

(Univ. de Valencia, 1991)

Se trata de una distribución binomial en la que $p = 0{,}5$ y $q = 1 - p = 0{,}5$. La probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtengan x caras es:

$$\binom{3}{x}(0{,}5)^x \cdot (0{,}5)^{3-x} = \binom{3}{x}(0{,}5)^3$$

a) $\binom{3}{1}(0{,}5)^1(0{,}5)^2 = 3 \cdot (0{,}5)^3 = \boxed{0{,}375}$

b) $\binom{3}{3}(0{,}5)^3(0{,}5)^0 = (0{,}5)^3 = \boxed{0{,}125}$

c) Suponer que se ha obtenido un número impar de caras equivale a restringir el universo a los sucesos elementales de obtener un número impar de caras. La probabilidad pedida es:

$$P = \frac{\text{Probabilidad de obtener una cara}}{\text{Probabilidad de obtener 1 cara o 3 caras}} = \frac{0{,}375}{0{,}375 + 0{,}125} = \boxed{0{,}75}$$

15.2 En una manzana de casas hay 10 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0,4, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Calcular la probabilidad de que en cierto día se encuentren 8 automóviles aparcados.

(Univ. de Oviedo, 1991)

a) Es una distribución binomial en la que $p = 0{,}4$ y $q = 1 - p = 0{,}6$.

b) $\binom{10}{8}(0{,}4)^8(0{,}6)^2 = \binom{10}{2}(0{,}4)^8(0{,}6)^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}0006553 \cdot 0{,}36 = \boxed{0{,}0106158}$

15.3 Una familia tiene 10 hijos. La distribución por sexos es igualmente probable. Hallar la probabilidad de que haya:

a) Como mucho tres niñas.
b) Al menos una niña.
c) Al menos ocho niños.
d) Al menos una niña y un niño.

(Univ. de La Laguna, Tenerife, 1991)

Tenemos una distribución binomial en la que $p = 0{,}5$ es la probabilidad de que haya una niña y $q = 1 - p = 0{,}5$ es la probabilidad de que haya un niño.

a) $P_a = \binom{10}{0}(0{,}5)^0(0{,}5)^{10} + \binom{10}{1}(0{,}5)^1(0{,}5)^9 + \binom{10}{2}(0{,}5)^2(0{,}5)^8 + \binom{10}{3}(0{,}5)^3(0{,}5)^7 =$

$= (1 + 10 + 45 + 120)(0{,}5)^{10} = \boxed{0{,}171864}$

b) El suceso contrario de "al menos una niña" es "los 10 son niños", de donde:

$P_b = 1 - \binom{10}{0}(0{,}5)^0(0{,}5)^{10} = 1 - (0{,}5)^{10} = \boxed{0{,}9990235}$

c) $P_c = \binom{10}{0}(0{,}5)^0(0{,}5)^{10} + \binom{10}{1}(0{,}5)^1(0{,}5)^9 + \binom{10}{2}(0{,}5)^2(0{,}5)^8 = (1 + 10 + 45)(0{,}5)^{10} =$

$= \boxed{0{,}054684}$

d) El suceso contrario de "al menos una niña y un niño" es "todos son niñas o todos son niños":

$P_d = 1 - \binom{10}{10}(0{,}5)^{10}(0{,}5)^0 - \binom{10}{0}(0{,}5)^0(0{,}5)^{10} = 1 - 2 \cdot (0{,}5)^{10} = \boxed{0{,}998047}$

15.4 Una determinada raza de perros tiene 4 cachorros en cada camada. Si la probabilidad de que un cachorro sea macho es de 0,55, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que en una camada dos exactamente sean hembras.
b) Calcular la probabilidad de que en una camada al menos dos sean hembras.

(Univ. de Madrid)

Si la probabilidad de que un cachorro sea macho es $p = 0{,}55$, la probabilidad de que sea hembra es $q = 1 - p = 0{,}45$.

a) $\binom{4}{2}(0{,}55)^2(0{,}45)^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}(0{,}3025)(0{,}2025) = \boxed{0{,}3675375}$

b) La probabilidad pedida es que haya 2, 1 ó 0 machos:

$\binom{4}{2}(0{,}55)^2(0{,}45)^2 + \binom{4}{1}(0{,}55)^1(0{,}45)^3 + (0{,}45)^4 = 0{,}3675375 + 4(0{,}55)(0{,}091125) +$

$+ 0{,}0410062 = \boxed{0{,}6090562}$

15.5 Una encuesta revela que el 20 % de la población es favorable a un determinado político. Elegidas seis personas al azar, se desea saber:

a) Probabilidad de que las seis personas sean favorables al político.
b) Probabilidad de que las seis personas le sean desfavorables.
c) Probabilidad de que menos de tres personas le sean favorables.

(Univ. de Málaga, 1991)

La probabilidad de que elegida una persona sea favorable al político es 0,2, y la probabilidad de que sea desfavorable es 0,8.

a) $(0'2)^6 = \boxed{0{,}000064}$

b) $(0{,}8)^6 = \boxed{0{,}262144}$

c) $\binom{6}{0}(0{,}2)^0(0{,}8)^6 + \binom{6}{1}(0{,}2)^1(0{,}8)^5 + \binom{6}{2}(0{,}2)^2(0{,}8)^4 = (0{,}8)^6 + 6\cdot 0{,}2\cdot(0{,}8)^5 +$

$+ 15\cdot(0{,}2)^2(0{,}8)^4 = 0{,}262144 + 0{,}393216 + 0{,}24576 = \boxed{0{,}90112}$

15.6 La probabilidad de que un proyectil de en el blanco es 0,80. Si se lanzan 5 proyectiles se pide:

1) Probabilidad de que los 5 den en el blanco.
2) Probabilidad de que alguno de en el blanco.

(Univ. de Madrid, 1991)

Sea A el suceso "los cinco proyectiles dan en el blanco", B el suceso "alguno de los cinco proyectiles dan en el blanco" y C "ninguno de los cinco proyectiles dan en el blanco".

1) $P(A) = (0{,}8)^5 = \boxed{0{,}32768}$

2) Los sucesos B y C son contrarios.

$P(C) = (0{,}2)^5 \Rightarrow P(B) = 1 - P(C) = 1 - (0{,}2)^5 = 1 - 0{,}00032 = \boxed{0{,}99968}$

15.7 Se tira una moneda repetidamente hasta que salga cara. Calcular la probabilidad de que haya que tirar la moneda menos de cinco veces.

(Univ. de Barcelona, 1991)

Sea A el suceso "sale cara en alguna de las cuatro primeras tiradas", y B el suceso "sale cruz en las cuatro primeras tiradas".

Los sucesos A y B son contrarios.

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2^4} = \boxed{\frac{15}{16}}$$

15.8 **Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:**

a) Obtener al menos un uno lanzando cuatro dados.

b) Obtener al menos una vez dos unos lanzando dos dados veinticuatro veces.

(Univ. de Valladolid, 1991)

a) El suceso A "obtener al menos un uno al lanzar cuatro dados" es el suceso contrario del suceso B "no obtener ningún uno al lanzar cuatro dados".

La probabilidad de obtener un uno al lanzar un dado es $p = \frac{1}{6}$, y la de no obtener un uno es $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

$$P(B) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}4822528 \Rightarrow P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}4822528 = \boxed{0{,}517472}$$

b) El suceso C "obtener al menos dos unos al lanzar veinticuatro veces dos dados" es el suceso contrario del suceso D "no obtener ninguna vez dos unos al lanzar dos dados veinticuatro veces".

La probabilidad de obtener dos unos al lanzar dos dados es $p' = \frac{1}{36}$, y la de no obtener dos unos es $q' = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

$$P(D) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}5085953 \Rightarrow P(C) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}5085953 = \boxed{0{,}4914047}$$

15.9 **En un proceso de fabricación la probabilidad de que una unidad producida pase el control de calidad es del 90%. En un lote de 8 unidades ¿cuál es la probabilidad de que todas pasen el control de calidad. Y ¿de qué lo pasen al menos seis?.**

(Univ. de Santiago, 1991)

La probabilidad de que una unidad pase el control de calidad es $p = 0{,}9$, y de que no lo pase es $q = 1 - p = 0{,}1$.

Sea A el suceso "las 8 unidades del lote pasan el control de calidad", y B el suceso "de las 8 unidades del lote, al menos seis pasan el control de calidad", o lo que es lo mismo, "pasan el control de calidad 6, 7 u 8 unidades":

$$P(A) = (0{,}9)^8 = \boxed{0{,}4304672}$$

$$P(B) = \binom{8}{6}(0{,}9)^6(0{,}1)^2 + \binom{8}{7}(0{,}9)^7(0{,}1)^1 + (0{,}9)^8 = 28(0{,}531441)(0{,}01) +$$

$$+ 8(0{,}4782969)(0{,}1) + 0{,}4304672 = 0{,}1488034 + 0{,}382375 + 0{,}4304672 = \boxed{0{,}9619081}$$

15.10 **Una Universidad sabe que el 75% de sus graduados obtiene empleo durante el primer año de graduación. Se eligen 8 graduados de la citada Universidad al azar. Se pide:**

a) Probabilidad de que al menos 6 tengan empleo en el primer año.

b) Probabilidad de que como máximo 6 tengan empleo.

(Univ. de Madrid, 1991)

a) La probabilidad de que un graduado de la citada Universidad, elegido al azar, encuentre trabajo en el primer año es $p = 0{,}75$, y de que no lo encuentre es $q = 1 - q = 0{,}25$.

Elegidos 8 graduados, al menos 6 tendrán empleo si lo tienen 6, 7 u 8. La probabilidad pedida es:

$$P = \binom{8}{6}(0{,}75)^6(0{,}25)^2 + \binom{8}{7}(0{,}75)^7(0{,}25)^1 + (0{,}75)^8 = \binom{8}{2}(0{,}75)^6(0{,}25)^2 +$$

$$+ \binom{8}{1}(0{,}75)^7(0{,}25) + (0{,}75)^8 = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}(0{,}1779784)(0{,}0625) + 8(0{,}1334838)(0{,}25) +$$

$$+ 0{,}1001128 = 0{,}3114622 + 0{,}2669676 + 0{,}1001128 = \boxed{0{,}6785426}$$

b) El suceso contrario del suceso A: "como máximo 6 tienen empleo", es el suceso B: "tienen empleo 7 u 8"

$$P(B) = \binom{8}{7}(0{,}75)^7(0{,}25)^1 + (0{,}75)^8 = 0{,}2669676 + 0{,}1001128 = 0{,}3670804$$

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}3670804 = \boxed{0{,}6329196}$$

15.11 **Un laboratorio afirma que una droga causa efectos secundarios en una proporción de 3 de cada 100 pacientes. Para contrastar esta afirmación, otro laboratorio elige al azar a 5 pacientes a los que aplica la droga. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?**

a) Ningún paciente tenga efectos secundarios.

b) Al menos dos tengan efectos secundarios.

c) ¿Cuál es el número medio de pacientes que espera el laboratorio que sufran efectos secundarios si elige 100 pacientes al azar?

(Univ. de Córdoba)

a) Si la probabilidad de que un paciente, elegido al azar, al que se le aplica la droga tenga efectos secundarios es $p = 0{,}03$, la probabilidad de que no tenga efectos secundarios es $q = 1 - p = 0{,}97$.

La probabilidad de que ninguno de los 5 pacientes tenga efectos secundarios es:

$$P = (0{,}97)^5 = \boxed{0{,}858734}$$

b) El suceso A "al menos 2 de los 5 pacientes tienen efectos secundarios", es el suceso contrario del suceso B "tienen efectos secundarios 0 ó 1 pacientes".

$$P(B) = (0{,}97)^5 + \binom{5}{1}(0{,}97)^4(0{,}03) = 0{,}858734 + 0{,}1327939 = 0{,}9915279 \Rightarrow$$

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}9915279 = \boxed{0{,}0084721}$$

c) El número medio pedido es $n.p = 100 \cdot 0{,}03 = \boxed{3}$

15.12 Si el 20% de los cerrojos producidos por una máquina son defectuosos, determinar la probabilidad de que de 4 cerrojos elegidos al azar:
a) Uno es defectuoso.
b) A lo más dos son defectuosos.

(Univ. de Extremadura, 1991)

La probabilidad de que un cerrojo elegido al azar sea defectuoso es $p = 0{,}2$, y de que no sea defectuoso: $q = 1 - p = 0{,}8$.

a) $\binom{4}{1}(0,2)^1(0,8)^3 = 4\cdot(0,2)\,(0,8)^3 = \boxed{0{,}4096}$

b) Podrá haber 0, 1 ó 2 defectuosos:

$$\binom{4}{0}(0,2)^0(0,8)^4 + \binom{4}{1}(0,2)^1(0,8)^3 + \binom{4}{2}(0,2)^2\cdot(0,8)^2 =$$
$$= 1\cdot(0,8)^4 + 0{,}4096 + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}(0,2)^2(0,8)^2 = 0{,}4096 + 0{,}4096 + 0{,}1536 = \boxed{0{,}9728}$$

15.13 Suponiendo que cada nacido tenga probabilidad de 0,49 de ser varón, hallar la probabilidad de que una familia con cuatro hijos tenga:
a) Tres niños y una niña.
b) Los tres mayores niños.
c) Al menos dos niños.

(Univ. de Navarra, 1991)

Si la probabilidad de que un nacido sea niño es $p = 0{,}49$, la probabilidad de que sea niña es $q = 1 - p = 0{,}51$.

a) Por la fórmula de Bernouilli:

$$P_a = \binom{4}{3}(0,49)^3(0,51) = 4\cdot 0{,}117649\cdot 0{,}51 = 0{,}2400039 \approx \boxed{0{,}24}$$

b) Si V_i es el suceso "el nacido en i lugar es niño" y N_i el suceso "el nacido en i lugar es niña", el suceso "los tres mayores son niños" es $B = (V_1\cap V_2\cap V_3\cap V_4)\cup(V_1\cap V_2\cap V_3\cup N_4)$, de donde, por ser los sucesos $V_1\cap V_2\cap V_3\cap V_4$ y $V_1\cap V_2\cap V_3\cap N_4$ incompatibles, y los sucesos V_i y V_j, $i\neq j$, y V_i y N_j, $i\neq j$, independientes dos a dos:

$$P(B) = P(V_1\cap V_2\cap V_3\cap V_4) + P(V_1\cap V_2\cap V_3)\cap N_4) = P(V_1)\cdot P(V_2)\cdot P(V_3)\cdot P(V_4) +$$
$$+ P(V_1)\cdot P(V_2)\cdot P(V_3)\cdot P(N_4) = 0{,}49\cdot 0{,}49\cdot 0{,}49\cdot 0{,}49 + 0{,}49\cdot 0{,}49\cdot 0{,}49\cdot 0{,}51 =$$
$$= 0{,}057648 + 0{,}0600009 = 0{,}1176489 \approx \boxed{0{,}12}$$

c) El suceso contrario de "al menos dos niños" es "tres o cuatro niñas".

$$P_c = 1 - \binom{4}{3}(0,51)^3\cdot(0,49) - \binom{4}{4}(0,51)^4 = 1 - 4\cdot(0,51)^3\cdot(0,49) - (0,51)^4 =$$
$$= 1 - 0{,} - 0{,}067652 = 0{,}6723521 \approx \boxed{0{,}67}$$

15.14 Dos ajedrecistas de igual maestría juegan al ajedrez. ¿Qué es más probable: ganar dos de cuatro partidas o tres de seis partidas? (Los empates no se toman en consideración?

(Univ. de Salamanca)

La probabilidad de ganar una partida es $p = 0,5$, y la probabilidad de perder una partida es $q = 1 - p = 0,5$.

La probabilidad de ganar dos de cuatro partidas:

$$P_1 = \binom{4}{2} (0,5)^2 (0,5)^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} (0,5)^4 = 0,375$$

La probabilidad de ganar tres de seis partidas es:

$$P_2 = \binom{6}{3} (0,5)^3 (0,5)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} (0,5)^6 = 0,3125$$

Es más facil ganar dos de cuatro partidas que tres de seis.

15.15 En un torneo de ajedrez los soviéticos Popov y Filipov disputan la final. Gana el que antes gane 5 partidas. Popov ganó la primera partida, pero Filipov es igual de bueno que él. Diga qué probabilidad tiene Popov de ganar el torneo, sin contar las tablas.

(Univ. de Las Palmas de Gran Canaria, 1991)

Popov ganará si:

– gana las cuatro siguientes partidas: $P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

– gana tres de las cuatro siguientes partidas y la sexta: $P_2 = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \frac{1}{2}$

– gana tres de las cinco siguientes partidas y la séptima: $P_3 = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$

– gana tres de las seis siguientes partidas y la octava: $P_4 = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}$

– gana tres de las siete siguientes partidas y la novena: $P_5 = \binom{7}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2}$

La probabilidad pedida es la suma de todos los resultados anteriores, ya que los sucesos considerados son incompatibles dos a dos:

$$P = \frac{1}{2^4} + 4 \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{2^6} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{2^7} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{2^8} = \boxed{\frac{163}{256}}$$

15.16 Un sistema de protección contra cohetes está constituido por n unidades de radar que funcionan independientemente, cada una con una probabilidad de 0,9 de detectar un cohete que ingresa en la zona que cubren todas las unidades. Se pide:

a) Si $n = 5$ y un cohete entra en la zona, ¿cuál es la probabilidad de que cuatro unidades de radar detecten el cohete? .

b) ¿Cuál debe ser n para que la probabilidad de detectar el cohete que entra en la zona sea de 0,999? .

(Univ. de Madrid, 1992)

Si la probabilidad de que una unidad de radar detecte el cohete es $p = 0,9$, la probabilidad de que no lo detecte es: $q = 1 - 0,9 = 0,1$.

a) Si un cohete entra en la zona, la probabilidad de que de las cinco unidades cuatro detecten el cohete es:

$$P = \binom{5}{4} (0,9)^4 (0,1)^1 = 5 \cdot (0,9)^4 (0,1) = \boxed{0,32805}$$

b) Si hay n cohetes, la probabilidad de que un cohete que entra en la zona no sea detectado por ninguno de ellos es:

$$(0,1)^n$$

y la probabilidad de que sea detectado (por uno o más) es:

$$1 - (0,1)^n = 0,999 \Rightarrow (0,1)^n = 1 - 0,999 = 0,001 = (0,1)^3 \Rightarrow \boxed{n = 3}$$

15.17 Entre las solicitudes de empleo presentadas en una empresa, el 15% corresponden a hombres que solicitan el primer empleo, el 10% a mujeres que solicitan el primer empleo, el 45% a hombres con experiencia laboral, y el 30% restante a mujeres con experiencia laboral.

a) Si se acepta a tres personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos sean personas que ha solicitado el primer empleo?

b) Si se escogen dos personas con experiencia, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto sexo?

(Univ. de Cantabria, 1992)

Sea H el suceso "la persona que solicita empleo es hombre", M "es mujer", E "solicita el primer empleo" y L "tiene experiencia laboral".

a) La probabilidad de que una persona que solicita empleo no tenga experiencia laboral es:

$$p = \frac{25}{100} = 0,25$$

	H	M	
E	15	10	25
L	45	30	75

y de que tenga experiencia laboral:

$$q = 1 - p = 1 - 0,25 = 0,75$$

Elegidas tres personas al azar, la probabilidad de que al menos dos sean personas que han solicitado el primer empleo es que haya exactamente dos o tres que han solicitado el primer empleo:

$$P = \binom{3}{2} (0,25)^2 (0,75)^1 + (0,25)^3 = 3 \cdot 0,0625 \cdot 0,75 + 0,015625 = \boxed{0,15625}$$

b) El saber que las dos personas elegidas tienen experiencia laboral equivale a restringir el universo al suceso L. La probabilidad de que una persona con experiencia laboral sea hombre es:

$$p' = \frac{45}{75} = 0,6$$

y de que sea mujer es: $q' = 1 - p' = 1 - 0,6 = 0,4$

La probabilidad de que elegidas dos personas con experiencia laboral, las dos sean de distinto sexo es:

$$P' = \binom{2}{1} (0,6)^1 (0,4)^1 = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4) = \boxed{0,48}$$

CAPITULO 16

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA DISTRIBUCION NORMAL

VARIABLE ALEATORIA CONTINUA. Una variable aleatoria es continua si puede tomar todos los valores de un intervalo.

Si la función de distribución es derivable, siendo

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

se tiene

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}$$

A la función f se llama **función de densidad.**

La función f es función de densidad de una variable aleatoria continua si cumple las dos propiedades siguientes:

1º $f(x) \geq 0$ para todo x perteneciente al conjunto de definición de la función.

2º

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1}$$

Si la función de densidad está definida en el intervalo [a, b] (o]a, b[), esta condición equivale a

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 1$$

Sea calcular el valor de a para que sea función de densidad la fonción f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ ax + 0{,}5 & \text{si } 0 \leq X \leq 4 \\ 0 & \text{si } X > 4 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{4} (ax + 0{,}5)\,dx = \left[a\frac{x^2}{2} + 0{,}5x\right]_0^4 = a\,\frac{16}{2} + 0{,}5\cdot 4 - 0 = 8a + 2 = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

Como $f(x) = -\frac{1}{8}x + 0{,}5 \geq 0$ para $0 \leq X \leq 4$, la función es función de densidad.

La función de densidad es la derivada de la función de distribución, y la función de distribución se obtiene integrando la función de densidad.

$$\boxed{F(x) = P(-\infty < X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}$$

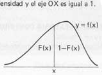
Si la función de densidad está definida en el intervalo $[a, b]$ (o $]a, b[$):

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x)\,dx$$

$$\boxed{P(x_1 \leqslant X \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}$$

El área comprendida entre la gráfica de la función de densidad y el eje OX es igual a 1.

$$\boxed{P(X > x) = 1 - F(x) = \int_{x}^{+\infty} f(x)\,dx}$$



$$\boxed{P(X = x) = 0}$$

La función de distribución del último ejemplo es, al estar definida en el intervalo $[0, 4]$:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \left(-\frac{1}{8}x + 0{,}5\right)dx = \left[-\frac{1}{8}\,\frac{x^2}{2} + 0{,}5\,x\right]_0^x = -\frac{1}{16}x^2 + 0{,}5\,x$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X < 0 \\ -\dfrac{1}{16}x^2 + 0{,}5\,x & \text{si} \quad 0 \leqslant X \leqslant 4 \\ 1 & \text{si} \quad 4 < X \end{cases}$$

$$P(1 < X < 3) = \int_1^3 f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{16}x^2 + 0{,}5\,x\right]_1^3 = -\frac{1}{16}\,9 + 0{,}5\cdot 3 - \left(-\frac{1}{16}\cdot 1 + 0{,}5\cdot 1\right) = 0{,}5$$

$$P(X \geqslant 2) = \int_2^4 f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{16}x^2 + 0{,}5\,x\right]_2^4 = -\frac{1}{16}\cdot 16 + 0{,}5\cdot 4 - \left(-\frac{1}{16}\cdot 4 + 0{,}5\cdot 2\right) = 0{,}25$$

Media o esperanza matemática de una variable aleatoria continua:

$$\boxed{\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx}$$

Si la función de densidad está definida en el intervalo $[a, b]$ (o $]a, b[$):

$$\mu = \int_a^b x\cdot f(x)\,dx$$

Varianza de una variable aleatoria continua:

$$\boxed{\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2}$$

Si la función de densidad está definida en el intervalo $[a, b]$ (o $]a, b[$) :

$$\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx = \int_a^b x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2$$

Se desea hallar la media, la varianza y la desviación típica de una variable aleatoria continua que tiene la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X \leqslant 0 \\ 0{,}5\,(x^3 + x) & \text{si} \quad 0 < X < 1 \\ 1 & \text{si} \quad X \geqslant 1 \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X \leqslant 0 \\ 0{,}5\,(3x^2 + 1) & \text{si} \quad 0 < X < 1 \\ 0 & \text{si} \quad X > 1 \end{cases}$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 0{,}5\,(3x^3 + x)\,dx = 0{,}5\left[3\,\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0{,}5\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}625$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \mu^2 = \int_0^1 0{,}5\,(3x^4 + x^2)\,dx - (0{,}625)^2 = 0{,}5\left[3\,\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 - 0{,}390625 = 0{,}5\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) -$$

$$- 0{,}390625 = 0{,}076042$$

$$\sigma = \sqrt{0{,}076042} = 0{,}275757$$

DISTRIBUCION NORMAL.

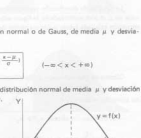
Una variable aleatoria continua tiene una distribución normal o de Gauss, de media μ y desviación típica σ, si su función de densidad es:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

Para expresar que una variable aleatoria X tiene una distribución normal de media μ y desviación típica σ se escribe: X es $N(\mu, \sigma)$, o simplemente $N(\mu, \sigma)$.

La curva $y = f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

- es simétrica respecto de la recta $x = \mu$
- tiene un máximo en $x = \mu$
- tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$
- los puntos de abscisas $\mu + \sigma$, $\mu - \sigma$ son puntos de inflexión.



En el intervalo $[\sigma-\mu, \sigma+\mu]$ se encuentra el 68,2 % del total de la población, en el $[\sigma-2\mu, \sigma+2\mu]$ el 95,4 % , y en $[\sigma-3\mu, \sigma+3\mu]$ el 99,7 %.

La función de distribución de una variable aleatoria $N(\mu, \sigma)$ es:

$$\boxed{F(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

Si *tipificamos* la variable X, esto es, tomamos como variable $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

la expresión correspondiente a la función de densidad toma la forma *reducida* o *tipificada*, N (0, 1):

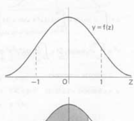
$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}}$$

La función de distribución de una variable aleatoria, N(0, 1) es:

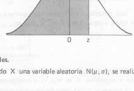
$$\boxed{F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz} \qquad (-\infty < z < +\infty)$$

La curva de la función de densidad tipificada, N(0,1) , tiene las siguientes propiedades:

- es simétrica respecto de la recta $x = 0$
- tiene su máximo para $z = 0$
- el eje OZ es asíntota horizontal
- los puntos de abscisas 1 y −1 son los puntos de inflexión.



La función de distribución representa, para cada valor de z, el área sombreada en la figura adjunta, y se encuentra tabulada (véase la última página del libro).



Cálculo de probabilidades en distribuciones normales.

El cálculo de la probabilidad $P(x_1 < X < x_2)$, siendo X una variable aleatoria $N(\mu, \sigma)$, se realiza del siguiente modo:

— se tipifican los valores x_1 y x_2: $\quad z_1 = \dfrac{x_1-\mu}{\sigma} \quad ; \quad z_2 = \dfrac{x_2-\mu}{\sigma}$

— mediante la tabla de la distribución normal tipificada se calcula $P(z_1 < Z < z_2)$.

$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$$

Veamos distintos casos que se pueden presentar. En todos ellos consideraremos que la variable está tipificada, siendo a un número real nulo o positivo ($-a$ es nulo o negativo), y que el área entre la curva y el eje de abscisas es igual a 1.

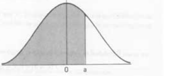
La tabla de la distribución normal tipificada que emplearemos da el área de $-\infty$ a z. En algunos distritos universitarios suelen emplear una tabla que da el área de 0 a z. El empleo de una u otra tabla es similar.

$$P(Z \leq a)$$

se obtiene directamente en la tabla.

$P(Z \leq 1{,}26) = 0{,}8962$

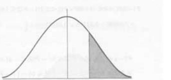
Intersección de la fila 1,2 con la columna 0,06.



$$P(Z \geq a) = 1 - P(Z < a)$$

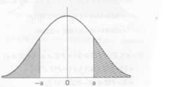
$P(Z \geq 0{,}87) = 1 - P(Z < 0{,}87) = 1 - 0{,}8078 = 0{,}1922$

El cálculo de $P(Z < 0{,}87)$ se ha hecho hallando la intersección de la fila 0,8 con la columna 0,07.



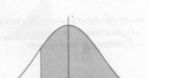
$$P(Z \leq -a) = P(Z \geq a) = 1 - P(Z < a)$$

$P(Z \leq -2{,}43) = 1 - P(Z < 2{,}43) = 1 - 0{,}992451 = 0{,}007549$



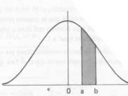
$$P(Z \geq -a) = P(Z \leq a)$$

$P(Z \geq -1{,}28) = P(Z \leq 1{,}28) = 0{,}8997$



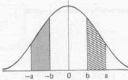
$$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$$

$$P(0{,}35 \leq Z \leq 1{,}62) = P(Z \leq 1{,}62) - P(Z \leq 0{,}35) =$$
$$= 0{,}94738 - 0{,}6368 = 0{,}31058$$



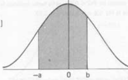
$$P(-a \leq Z \leq -b) = P(b \leq Z \leq a) =$$
$$= P(Z \leq a) - P(Z \leq b)$$

$$P(-2{,}31 \leq Z \leq -1{,}46) = P(Z \leq 2{,}31) - P(Z \leq 1{,}46) =$$
$$= 0{,}98956 - 0{,}92785 = 0{,}06171$$



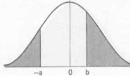
$$P(-a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq -a) =$$
$$= P(Z \leq b) - P(Z \geq a) = P(Z \leq b) - [1 - P(Z < a)]$$

$$P(-0{,}64 \leq Z \leq 1{,}02) = P(Z \leq 1{,}02) - P(Z \leq -0{,}64) =$$
$$= P(Z \leq 1{,}02) - [1 - P(Z \leq 0{,}64)] =$$
$$= 0{,}8461 - (1 - 0{,}7389) = 0{,}5850$$



$$P(-a \leq Z) + P(Z \geq b) = P(Z \geq a) + P(Z \geq b) =$$
$$= [1 - P(Z < a)] + [1 - P(Z < b)] =$$
$$= 2 - P(Z \leq a) - P(Z \leq b)$$

$$P(-1{,}72 \leq Z) + P(Z \geq 0{,}61) = P(Z \geq 1{,}72) + P(Z \geq 0{,}61) =$$
$$= [1 - P(Z < 1{,}72)] + [1 - P(Z < 0{,}61)] =$$
$$= (1 - 0{,}95728) + (1 - 0{,}7291) = 0{,}31362$$



APROXIMACION DE LA DISTRIBUCION BINOMIAL A LA NORMAL.

En el caso donde n es grande y ni p ni $q = 1 - p$ son próximos a cero, la distribución binomial puede aproximarse a la distribución normal $N(\mu, \sigma)$ haciendo

$$\boxed{\mu = n \cdot p} \quad ; \quad \boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

La aproximación será tanto mejor cuanto mayor sea n. Se suele considerar que la aproximación es buena si $n > 30$ y p toma valores próximos a 0,5. También se suele considerar que la aproximación es buena si $n \cdot p$ y $n \cdot q$ son iguales o superiores a 5.

Un examen tipo test tiene 100 preguntas y cada pregunta cuatro respuestas diferentes, de las que sólo una es correcta.

a) Calcular la probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte más de 20 preguntas.

b) Calcular la probabilidad de que de las 20 primeras preguntas acierte a lo sumo 4.

(Univ. de Cadiz, 1992)

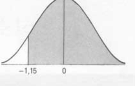
a) Tenemos una distribución binomial en la que $n = 100$ y $p = \frac{1}{4} = 0,25$. Como $n \cdot p = 100 \cdot 0,25 = 25 > 5$, podemos aproximar la distribución binomial a una normal, siendo:

$$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,25 = 25$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = 4,33$$

$$P(X > 20) = P(Z > \frac{20 - 25}{4,33}) = P(Z > -1,15) =$$

$$= P(Z \leqslant 1,15) = 0,8749$$



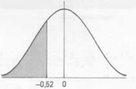
b) Tenemos una distribución binomial en la que $n = 20$ y $p = 0,25$. Como $n \cdot p = 20 \cdot 0,25 = 5 \geqslant 5$, podemos aproximar la binomial a una normal, siendo:

$$\mu = 20 \cdot 0,25 = 5$$

$$\sigma = \sqrt{20 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = 1,94$$

$$P(X \leqslant 4) = P(Z \leqslant \frac{4 - 5}{1,94}) = P(Z \leqslant -0,52) =$$

$$= 1 - P(Z \leqslant 0,52) = 1 - 0,6985 = 0,3015$$



PROBLEMAS

16.1 La función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}x & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 2] \end{cases}$$

¿puede ser la función de densidad de alguna distribución continua?

(Univ. de Alicante)

$$\int_0^2 \frac{2}{7}x\,dx = \left[\frac{2}{7}\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{2}{7}\cdot\frac{4}{2} = \frac{4}{7} \neq 1 \ \Rightarrow$$

la función definida no es una función de densidad.

16.2 Calcular k para que la función $f\colon R^+_* \to R$ definida por

$$f(x) = k e^{-3x}$$

sea una función de densidad.

(Univ. de Santiago)

La función f será una función de densidad si:

$$\int_0^{+\infty} k e^{-3x} dx = 1 \ \Rightarrow \ \frac{k}{-3}\int_0^{+\infty} e^{-3x}(-3)\,dx = \frac{k}{-3}\left[e^{-3x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{k}{-3}\,\frac{1}{e^{3x}}\right) - \frac{k}{-3}e^{-3\cdot 0} =$$

$$= \frac{k}{-3}\cdot\frac{1}{\infty} + \frac{k}{3}\cdot 1 = 1 \ \Rightarrow \ 0 + \frac{k}{3} = 1 \ \Rightarrow \ \boxed{k = 3}$$

16.3 La función de densidad de una variable aleatoria continua, X, definida en [0,2] es

$$f(x) = \frac{k-x}{2}.$$

Se pide: a) Calcular k para que f(x) sea efectivamente una función de densidad.

b) Calcular $P(X \leq \frac{1}{4})$.

(Univ. de Santiago)

La función f será una función de densidad si

$$\int_0^2 \frac{k-x}{2}\,dx = 1 \;\Rightarrow\; \left[\frac{k}{2}x - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{k}{2}\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot 4 = 1\;;\; k-1=1 \;\Rightarrow\; \boxed{k=2}$$

$$\int_0^x \left(1-\frac{x}{2}\right) dx = x - \frac{x^2}{4} \;\Rightarrow\;$$ la función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ x - \dfrac{x^2}{4} & \text{si } 0 \leq X \leq 2 \\ 1 & \text{si } X > 2 \end{cases}$$

de donde:
$$P\left(X \leq \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} = \boxed{\frac{15}{64}}$$

16.4 Determinar a en la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X < 0 \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{si} \quad 0 \leq X \leq a \\ 0 & \text{si} \quad X > a \end{cases}$$

para que sea una función de densidad. Calcular la función de distribución y representarla gráficamente. Encontrar $P(X \leq 1)$, $P(X > 0'5)$.

(Univ. de Murcia, 1991)

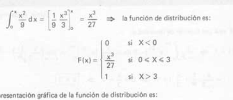
La función f será función de densidad si

$$\int_0^a \frac{x^2}{9}\,dx = 1 \;\Rightarrow\; \left[\frac{1}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a = 1 \;\Rightarrow\; \frac{a^3}{27} = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{a=3}$$

$$\int_0^x \frac{x^2}{9}\,dx = \left[\frac{1}{9}\,\frac{x^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27} \;\Rightarrow\;$$ la función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 0 \\ \dfrac{x^3}{27} & \text{si } 0 \leq X \leq 3 \\ 1 & \text{si } X > 3 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función de distribución es:



$$P(X \leq 1) = F(1) = \boxed{\frac{1}{27}} \;;\quad P(X \geq 0'5) = 1 - F(0{,}5) = 1 - \frac{(0'5)^3}{27} = 1 - \frac{0'125}{27} = \boxed{0'9954}$$

16.5 La variable aleatoria X = "tiempo de reparación (en horas) de una avería en un taller de coches" tiene por función de densidad

$$f(x) = -\frac{x^2}{6} + Kx \qquad (0 < X < 3)$$

Calcula la probabilidad de que una reparación dure menos de una hora.

Univ. de Santiago, 1991)

Hallemos K para que f sea función de densidad:

$$\int_0^3 \left(-\frac{x^2}{6} + Kx\right)dx = 1 \Rightarrow \left[-\frac{1}{6}\frac{x^3}{3} + K\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{18}\cdot 27 + \frac{K}{2}\cdot 9 = 1\;;$$

$$-\frac{3}{2} + \frac{9}{2}K = 1\;;\; \frac{9}{2}K = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow K = \frac{5}{9}$$

$$\int_0^x \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{5}{9}x\right)dx = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{5}{18}x^2 \Rightarrow$$ la función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq 0 \\ -\frac{1}{18}x^3 + \frac{5}{18}x^2 & \text{si } 0 < X < 3 \\ 1 & \text{si } X \geq 3 \end{cases}$$

$$P(X < 1) = F(1) = -\frac{1}{18} + \frac{5}{18} = \frac{4}{18} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

16.6 Supón que x e y representan la talla de los adultos de dos ciudades, que supondremos que se distribuyen normalmente con medias 168 y 171 centímetros y desviaciones típicas 2 y 1 cms., respectivamente. Justifica, sin recurrir a tablas, que la probabilidad de que x esté comprendida entre 166 y 170 cms. coincide con la probabilidad de que y esté comprendida entre 170 y 172 cms.

(Univ. de Valencia, 1991)

Tipificando ambas variables:

$$z = \frac{x - 168}{2} \Rightarrow P(166 \leq X \leq 170) = P\left(\frac{166-168}{2} \leq Z \leq \frac{170-168}{2}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1)$$

$$z = \frac{y - 171}{1} \Rightarrow P(170 \leq Y \leq 172) = P\left(\frac{170-171}{1} \leq Z \leq \frac{172-171}{1}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1)$$

ambas probabilidades son iguales.

16.7 La duración media de un lavavajillas es de 15 años, y su desviación típica 0,5. Sabiendo que la vida útil del lavavajillas se distribuye normalmente, hallar la probabilidad de que al adquirir un lavavajillas dure más de 15 años.

(Univ. de León)

$$P(X > 15) = P(Z > \frac{15-15}{0{,}5}) = P(Z > 0) = P(Z < 0) = \boxed{0{,}5}$$

16.8 En un examen a un gran número de estudiantes, se comprobó que las calificaciones obtenidas correspondían razonablemente a una distribución normal con calificación media de 6 y desviación típica de 1.

Elegido al azar un estudiante, calcular cuál es la probabilidad de que su calificación esté comprendida entre 6,7 y 7,1.

(Univ. de Valladolid)

$$P(6{,}7 < X < 7{,}1) = P(\frac{6{,}7-6}{1} < Z < \frac{7{,}1-6}{1}) = P(0{,}7 < Z < 1{,}1) = P(Z < 1{,}1) - P(Z < 0{,}7) =$$

$$= 0{,}8643 - 0{,}7580 = \boxed{0{,}1063}$$

16.9 La altura de los mozos de un llamamiento al Servicio Militar sigue una distribución normal de media 1,7 y desviación típica 0,1. Se desea saber:

a) Probabilidad de que un mozo, elegido al azar, tenga una altura entre 1,7 y 1,9.

b) Si el llamamiento consta de 50.000 mozos y se libran por falta de talla aquellos cuya altura es inferior a 1,5, ¿cuál es el número esperado de libramientos por esta causa?

(Univ. de Salamanca, 1991)

a) $$P(1{,}7 < X < 1{,}9) = P(\frac{1{,}7-1{,}7}{0{,}1} < Z < \frac{1{,}9-1{,}7}{0{,}1}) = P(0 < Z < 2) = P(2) - P(0) =$$

$$= 0{,}97725 - 0{,}5000 = \boxed{0{,}47725}$$

b) $$P(X < 1{,}5) = P(Z < \frac{1{,}5-1{,}7}{0{,}1}) = P(Z < -2) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) =$$

$= 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$ = probabilidad de que se libre un mozo elegido al azar.

De 50.000 mozos cabe esperar que se libren $50.000 \times 0{,}02275 \approx \boxed{1.135}$

16.10 Las precipitaciones anuales en una región son, en media, de 2000 mm, con una desviación típica de 300 mm. Calcular, suponiendo distribución normal, la probabilidad de que un año determinado la lluvia no supere los 1200 mm.

(Univ. de Barcelona, 1991)

$$P(X < 1200) = P(Z < \frac{1200-2000}{300}) = P(Z < -2{,}67) = 1 - P(Z < 2{,}67) = 1 - 0{,}996207 =$$

$$= \boxed{0{,}003793}$$

16.11 La nota media de las pruebas de acceso correspondientes a los estudiante que querían ingresar en una facultad era 5,8 y la desviación típica 1,75. Fueron admitidos los de nota superior a 6.

a) ¿Cuál fue el porcentaje de admitidos si la distribución es normal?

b) ¿Con qué probabilidad exactamente cuatro de diez estudiantes son admitidos?

(Univ. de Barcelona)

a) $P(X>6)=P(Z>\frac{6-5{,}8}{1{,}75})=P(Z>0{,}11)=1-P(Z\leq 0{,}11)=1-0{,}5438=0{,}4562\approx$

$$\approx \boxed{45{,}62\ \%}$$

b) Si la probabilidad de que un estudiante sea admitido es $p=0{,}4562$, la probabilidad de que de diez estudiantes sean admitidos cuatro será:

$$\binom{10}{4}(0{,}4562)^4\,(1-0{,}4562)^6=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,(0{,}4562)^4\,(0{,}5438)^6=\boxed{0{,}235}$$

16.12 Una fábrica produce recipientes cuyas capacidades están distribuidas normalmente con media 10 y varianza 0,1. Un recipiente se considera defectuoso si su capacidad no está comprendida en el intervalo [9,90 , 10,17]. ¿Qué probabilidad tiene un recipiente, extraído al azar, de ser defectuoso?

(Univ. de Valladolid, 1992)

La probabilidad de que un recipiente, extraído al azar, no sea defectuoso es:

$$P(9{,}90\leq X\leq 10{,}17)=P(\frac{9{,}90-10}{0{,}1}\leq Z\leq \frac{10{,}17-10}{0{,}1})=P(-1\leq Z\leq 1{,}7)=$$

$$=P(Z\leq 1{,}7)-P(-1\leq Z)=P(Z\leq 1{,}7)-[1-P(Z\leq 1)]=0{,}95543-(1-0{,}8413)=0{,}79673$$

y la probabilidad de que dicho recipiente sea defectuoso es:

$$1-0{,}79673=\boxed{0{,}20327}$$

16.13 La presión sanguínea de ciertos enfermos sigue una ley normal de media 90 mm Hg y de desviación típica 12 mm Hg. Hallar la probabilidad de que elegido un paciente al azar:

a) Su presión sea mayor de 115 mm Hg.

b) Su presión esté comprendida entre 80 y 110 mm Hg.

(Univ. de Extremadura, 1991)

a) $P(X\geq 115)=P(Z\geq \frac{115-90}{12})=P(Z\geq 2{,}08)=1-P(Z\leq 2{,}08)=1-0{,}98124=\boxed{0{,}01876}$

b) $P(80\leq X\leq 110)=P(\frac{80-90}{12}\leq Z\leq \frac{110-90}{12})=P(-0{,}83\leq Z\leq 1{,}67)=$

$$=P(Z\leq 1{,}67)-P(-0{,}83\leq Z)=P(Z\leq 1{,}67)-[1-P(Z\leq 0{,}83)]=$$

$$=0{,}95254-(1-0{,}7967)=\boxed{0{,}74924}$$

16.14 En una muestra de 1000 personas de una determinada población, resultó que la talla media era de 170 cm con una desviación típica de 10 cm. Sabiendo que la talla se distribuye normalmente, calcula el número de personas que miden:

a) Menos de 160 cm.
b) Más de 2 m.

(Univ. de León, 1991)

a) $P(X<160)=P(Z<\frac{160-170}{10})=P(Z<-1)=1-P(Z\leq 1)=1-0{,}8413=0{,}1587$

Este número es la probabilidad de que una persona, elegida al azar, mida menos de 160 cm. En la muestra de 1000 personas cabe esperar que midan menos de 160 cm:

$$1000\cdot 0{,}1587\approx \boxed{159}$$

b) $P(X\geq 200)=P(Z\geq\frac{200-170}{10})=P(Z\geq 3)=1-P(Z\leq 3)=1-0{,}998650=0.00135$

$$1000\cdot 0{,}00135\approx \boxed{1}$$

16.15 Una empresa instala 20.000 bombillas. La duración de una bombilla sigue una distribución normal con media 305 días y desviación típica 40. ¿Cuántas bombillas se espera que se fundan antes de 365 días? ¿Cuántas durarán más de 401?.

(Univ. de Santiago)

La probabilidad de que una bombilla se funda antes de 365 días es:

$$P(X<365)=P(Z<\frac{365-305}{40})=P(Z<1{,}5)=0{,}93319$$

De 20000 bombillas cabe esperar que se fundan antes de 365 días:

$$20000\cdot 0{,}93319\approx \boxed{18664}$$

La probabilidad de que una bombilla dure más de 401 días es:

$$P(X>401)=P(Z>\frac{401-305}{40})=P(Z>2{,}4)=1-P(Z\leq 2{,}4)=1-0{,}991802=0{,}008198$$

De 20000 bombillas cabe esperar que duren más de 401 días:

$$20000\cdot 0{,}008188\approx \boxed{164}$$

16.16 El peso medio de los estudiantes de un colegio es 60 kg y la desviación típica es 6 kg. Suponiendo que los pesos están normalmente distribuidos

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante pese menos de 64 kg?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante pese 57 kg o más?
c) Si los estudiantes son 200, ¿cuántos cabe esperar que pesen más de 57 kg y menos de 64 kg?

 (Univ. de Sevilla)

a) $P(X < 64) = P(Z < \frac{64-60}{6}) = P(Z < 0{,}67) = \boxed{0{,}7486}$

b) $P(57 \leqslant X) = P(\frac{57-60}{6} \leqslant Z) = P(-0{,}5 \leqslant Z) = P(Z \geqslant 0{,}5) = 1 - P(Z < 0{,}5) =$

$= 1 - 0{,}6915 = \boxed{0{,}3085}$

c) La probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, pese más de 57 kg y menos de 64 kg es:

$P(57 < X < 64) = P(X < 64) - P(57 < X) = 0{,}7486 - 0{,}3085 = 0{,}4401$

De 200 estudiantes cabe esperar que pesen más de 75 kg y menos de 64 kg: $200 \cdot 0{,}4401 \approx \boxed{88}$

16.17 Los resultados de una prueba objetiva de selección a 200 personas indicaron que la distribución de puntuaciones era normal, con media de 80 puntos y desviación típica de 6 puntos. Calcular cuántos de los examinados han obtenido una puntuación entre 70 y 90 puntos.

Si se eligen al azar dos de esas 200 personas, calcular la probabilidad de que ambas personas tengan puntuación superior a 90.

(Univ. de Valencia, 1992)

La probabilidad de que una persona elegida al azar haya obtenido una puntuación entre 70 y 90 puntos es:

$$P(70 \leqslant X \leqslant 90) = P(\frac{70-80}{6} \leqslant Z \leqslant \frac{90-80}{6}) = P(-1{,}67 \leqslant Z \leqslant 1{,}67) =$$

$$= P(Z \leqslant 1{,}67) - P(-1{,}67 \leqslant Z) = P(Z \leqslant 1{,}67) - [1 - P(Z \leqslant 1{,}67)] =$$

$$= 0{,}95254 - (1 - 0{,}95254) = 0{,}90508$$

De 200 examinados cabe esperar que haya con puntuación entre 70 y 90 puntos:

$$200 \cdot 0{,}90508 \approx \boxed{181}$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar tenga puntuación superior a 90 es:

$$P(X > 90) = P(Z > \frac{90-80}{6}) = P(Z \geqslant 1{,}67) = 1 - P(Z \leqslant 1{,}67) = 1 - 0{,}95254 = 0{,}04746$$

La probabilidad de que elegidas dos personas al azar su puntuación sea superior a 90 puntos es:

$$(0{,}04746)^2 = \boxed{0{,}0022524}$$

16.18 Se sabe que la talla media de la población en edad escolar es de 165 cm con desviación típica de 12 cm. Un Centro tiene 1.400 alumnos matriculados:

a) ¿Cuántos alumnos miden más de 155 cm?
b) ¿Qué proporción (%) de alumnos mide entre 150 y 178 cm?
c) Determinar la probabilidad de que un cierto alumno mida entre 170 y 185 cm.

(Univ. de Cádiz, 1991)

a) La probabilidad de que un alumno mida más de 155 cm. es:

$$P(X > 155) = P(Z > \frac{155-165}{12}) = P(Z > -0{,}83 = P(Z \le 0{,}83) = 0{,}7967$$

De los 1.400 alumnos cabe esperar que midan más de 155 cm.

$$1.400 \cdot 0{,}7967 \approx \boxed{1115}$$

b) La probabilidad de que un alumno mida entre 150 y 178 cm. es:

$$P(150 < X < 178) = P(\frac{150-165}{12} < Z < \frac{178-165}{12}) = P(-1{,}25 < Z < 1{,}08) =$$

$$= P(Z < 1{,}08) - P(-1{,}25 < Z) = P(Z < 1{,}08) - [1 - P(Z < 1{,}25)] =$$

$$= 0{,}8599 - (1 - 0{,}8944) = 0{,}7543 \Rightarrow$$

el $\boxed{75{,}43\%}$ de los alumnos mide entre 150 y 178 cm.

c) $P(170 < X < 185) = P(\frac{170-165}{12} < Z < \frac{185-165}{12}) = P(0{,}42 < Z < 1{,}67) =$

$$= P(Z < 1{,}67) - P(Z < 0{,}42) = 0{,}95254 - 0{,}6628 = \boxed{0{,}28974}$$

16.19 Se llama cociente intelectual (C. I.) al cociente entre la edad mental y la edad real. Se sabe que la distribución del C. I. se distribuye normalmente con media 0,95 y desviación típica 0,22. En una población con 2.600 personas se desea saber:

a) ¿Cuántas tendrán un C. I. superior a 1,3?
b) ¿Cuántas tendrán un C.I. inferior a 0,7?
c) ¿Cuántas tendrán un C. I. entre 0,8 y 1,15?

(Univ. de Extremadura)

a) La probabilidad de que una persona, elegida al azar, tenga un C. I. superior a 1,3 es:

$$P(X > 1{,}3) = P(Z > \frac{1{,}3-0{,}95}{0{,}22}) = P(Z > 1{,}59) = 1 - P(Z \le 1{,}59) = 1 - 0{,}94408 = 0{,}05592$$

En una pobalción de 2.600 personas cabe esperar que tengan un C. I. superior a 1,3:

$$2600 \cdot 0{,}05592 \approx \boxed{145} \text{ personas}$$

b) $P(X < 0{,}7) = P(Z < \frac{0{,}7-0{,}95}{0{,}22}) = P(Z < -1{,}14) = 1 - P(Z \le 1{,}14) = 1 - 0{,}8729 = 0{,}1271$

$$2600 \cdot 0{,}1271 \approx \boxed{330} \text{ personas}$$

c) $P(0{,}8 < X < 1{,}15) = P(\frac{0{,}8-0{,}95}{0{,}22} < Z < \frac{1{,}15-0{,}95}{0{,}22}) = P(-0{,}68 < Z < 0{,}91) =$

$$= P(Z < 0{,}91) - P(-0{,}68 < Z) = P(Z < 0{,}91) - [1 - P(Z < 0{,}68)] = 0{,}8186 - (1 - 0{,}7517) =$$

$$= 0{,}5703 \Rightarrow 2600 \cdot 0{,}5703 \approx \boxed{1483} \text{ personas}$$

16.20 La compañía aréa "Avión" sabe que el tiempo de retraso de sus vuelos sigue una ley normal, con un retraso medio de 10 minutos y desviación típica de 5 minutos. Calcular:

a) Probabilidad de que un vuelo no tenga retraso.
b) Probabilidad de que el próximo vuelo llegue con no más de 10 minutos de retraso.
c) Probabilidad de que el próximo vuelo llegue con más de 20 minutos de retraso.

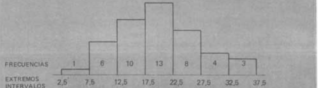
(Univ. de Oviedo)

a) $P(X \le 0) = P(Z \le \frac{0-10}{5}) = P(Z \le -2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0{,}97725 = \boxed{0{,}02275}$

b) $P(X \le 10) = P(Z \le \frac{10-10}{5}) = P(Z \le 0) = \boxed{0{,}5}$

c) $P(X \ge 20) = P(Z \ge \frac{20-10}{5}) = P(Z \ge 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0{,}97725 = \boxed{0{,}02275}$

16.21 El histograma de frecuencias agrupadas para ciertos datos es:



a) Calcular la media y la desviación típica.
b) Calcular la probabilidad de que una variable Normal con la media y desviación típica obtenidas en a) sea mayor de 22,5.

(Univ. de Madrid, 1992)

a)

Intervalos	Marcas de clase x_i	n_i	$x'_i = 20 - x$	$x_i'^2$	$n_i \cdot x'_i$	$n_i \cdot x_i'^2$
2,5–7,5	5	1	−15	225	−15	225
7,5–12,5	10	6	−10	100	−60	600
12,5–17,5	15	10	−5	25	−50	250
17,5–22,5	$\boxed{20}$	13	0	0	0	0
22,5–27,5	25	8	5	25	40	200
27,5–32,5	30	4	10	100	40	400
32,5–37,5	35	3	15	225	45	675
		45			0	2350

$\bar{x} = 20 + \frac{0}{45} = \boxed{20}$; $\bar{x}' = \frac{0}{45} = 0$; $s^2 = \frac{2350}{45} - 0^2 = 52{,}22 \Rightarrow s = \boxed{7{,}23}$

b) $P(X > 22{,}5) = P(Z > \frac{22{,}5-20}{7{,}23}) = P(Z > 0{,}35) = 1 - P(Z < 0{,}35) = 1 - 0{,}6368 = \boxed{0{,}3632}$

16.22 Las ventas de una determinada revista en un kiosco tienen de media 190 y una desviación típica de 25. ¿Cuantos ejemplares de la revista deben encargar para atender al 80 por ciento de los clientes?

(Univ. de Murcia, 1991)

Sea x el número de ejemplares de la revista que deben encargar para atender al 80 por ciento de los clientes. Se verificará:

$$P(X \leqslant x) = \frac{80}{100} = 0{,}8 \;\Rightarrow\; P(Z \leqslant \frac{x-190}{25}) = 0{,}8$$

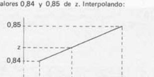
Este valor está comprendido, en la tabla de distribución normal tipificada, entre los valores 0,7995 y 0,8023, correspondientes, respectivamente, a los valores 0,84 y 0,85 de z. Interpolando:

$$\frac{z-0{,}84}{0{,}85-0{,}84} = \frac{t-0{,}7995}{0{,}8023-0{,}7995} \;\Rightarrow$$

$$z = 0{,}84 + \frac{0{,}01}{0{,}0028}\,(t-0{,}7995)$$

para $t = 0{,}8$: $z = 0{,}84 + \frac{100}{28}(0{,}8-0{,}7995) =$

$= 0{,}84 + 0{,}002 = 0{,}842 \;\Rightarrow$



$$z = \frac{x-190}{25} = 0{,}842 \;\Rightarrow\; x = 190 + 25 \cdot 0{,}842 \approx \boxed{211}$$

16.23 El peso de los toros de determinada ganadería se distribuye como una distribución normal de 500 kg de media y 45 kg de desviación típica. Si la ganadería tiene 2.000 toros:

a) ¿Cuántos pesarán más de 540 kg?
b) ¿Cuántos pesarán menos de 480 kg?
c) ¿Cuántos pesarán entre 490 y 510 kg?

(Univ. de Extremadura)

a) La probabilidad de que un toro, elegido al azar, pese más de 540 kg es:

$$P(X > 540) = P(Z > \frac{540-500}{45}) = P(Z > 0{,}88) = 1 - P(Z \leqslant 0{,}88) = 1 - 0{,}8106 = 0{,}1894$$

De 2000 toros cabe esperar que pesen más de 540 kg:

$$2000 \cdot 0{,}1894 \approx \boxed{379}$$

b) La probabilidad de que un toro, elegido al azar, pese menos de 480 kg. es:

$$P(X < 480) = P(Z < \frac{480-500}{45}) = P(Z \leqslant -0{,}44) = 1 - P(Z \leqslant 0{,}44) = 1 - 0{,}6700 = 0{,}3300$$

De 2000 toros cabe esperar que pesen menos de 480 kg:

$$2000 \cdot 0{,}33 = \boxed{660}$$

c) La probabilidad de que un toro, elegido al azar, pese entre 490 y 510 kg es:

$$P(490 < X < 510) = P\left(\frac{490-500}{45} < Z < \frac{510-500}{45}\right) = P(-0{,}22 \leq Z \leq 0{,}22) =$$

$$= P(Z \leq 0{,}22) - P(-0{,}22 \leq Z) = P(Z \leq 0{,}22) - [1 - P(Z \leq 0{,}22)] =$$

$$= 0{,}5871 - (1 - 0{,}5871) = 0{,}1742$$

De 2000 toros cabe esperar que pesen entre 490 y 510 kg:

$$2000 \cdot 0{,}1742 \approx \boxed{348}$$

16.24 El peso de los adultos de una población numerosa se distribuye normalmente con media 65 kg y desviación típica 3 kg. Se eligen dos individuos al azar. Calculando las correspondientes probabilidades, justifica qué es más probable:

a) Que cada uno de los individuos tenga un peso comprendido entre 63,5 y 66,5 kg.
b) Que uno de ellos tenga un peso comprendido entre 62 y 68 kg y el otro tenga un peso no comprendido entre 62 y 68 kg.

(Univ. de Valencia, 1991)

a) $P(63{,}5 \leq X \leq 66{,}5) = P\left(\frac{63{,}5-65}{3} \leq Z \leq \frac{66{,}5-65}{3}\right) = P(-0{,}5 \leq Z \leq 0{,}5) =$

$$= P(Z \leq 0{,}5) - P(-0{,}5 \leq Z) = P(Z \leq 0{,}5) - [1 - P(Z \leq 0{,}5)] =$$

$$= 2 \cdot P(Z \leq 0{,}5) - 1 = 2 \cdot 0{,}6915 - 1 = 0{,}383$$

Esta es la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga un peso comprendido entre 63,5 y 66,5 kg.

La probabilidad de que elegidos dos individuos tengan los dos un peso comprendido entre 63,5 y 66,5 kg. es:

$$(0{,}383)^2 = \boxed{0{,}146689}$$

b) $P(62 \leq X \leq 68) = P\left(\frac{62-65}{3} \leq Z \leq \frac{68-65}{3}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(-1 \leq Z)$

$$= P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = 2 \cdot P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$$

$P(X \notin [62{,}68]) = 1 - 0{,}6826 = 0{,}3174$

La probabilidad de que elegidos al azar dos individuos, el peso de uno esté comprendido entre 62 y 68 kg y el del otro no esté comprendido entre 62 y 68 kg es:

$$\binom{2}{1}(0{,}6826)^1(0{,}3174)^1 = \boxed{0{,}43333}$$

Es más probable la opción b) que la a).

16.25 Una máquina empaquetadora distribuye chinchetas en cajas según una distribución N(500,12). Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja tenga más de 506?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja tenga más de 490 y menos de 503?
c) Si el 65% de las cajas tienen un número de chinchetas entre 482 y a, calcular el valor de a.

(Univ. de Santiago)

a) $P(X > 506) = P(Z > \frac{506-500}{12}) = P(Z > 0{,}5) = 1 - P(Z \leq 0{,}5) = 1 - 0{,}6915 = \boxed{0{,}3085}$

b) $P(490 < X < 503) = P(\frac{490-500}{12} < Z < \frac{503-500}{12}) = P(-0{,}83 < Z < 0{,}25) =$

$= P(Z < 0{,}25) - P(-0{,}83 < Z) = P(Z < 0{,}25) - [1 - P(Z < 0{,}83)] =$

$= 0{,}5987 - (1 - 0{,}7967) = \boxed{0{,}3954}$

c) $P(482 < X < a) < 0{,}65 \Rightarrow P(\frac{485-500}{12} < Z < \frac{a-500}{12}) = P(-1{,}25 < Z < z') =$

$= P(Z < z') - P(-1{,}25 < Z) = P(Z < z') - [1 - P(Z < 1{,}25)] = 0{,}65 \Rightarrow$

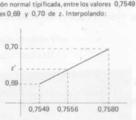
$P(Z < z') = 0{,}65 + (1 - 0{,}8944) = 0{,}7556$

Este valor está comprendido, en la tabla de distribución normal tipificada, entre los valores 0,7549 y 0,7580, correspondientes, respectivamente, a los valores 0,69 y 0,70 de z. Interpolando:

$\frac{z' - 0{,}69}{0{,}70 - 0{,}69} = \frac{0{,}7556 - 0{,}7549}{0{,}7580 - 0{,}7549} \Rightarrow$

$z' - 0{,}69 = 0{,}01 \frac{0{,}0007}{0{,}0031} = 0{,}002258 \Rightarrow$

$z' = \frac{a - 500}{12} = 0{,}692258 \Rightarrow \boxed{a = 508{,}31}$



16.26 El tiempo de vida del tubo de un TV en color sigue una distribución normal de media 7,2 años y desviación típica 2,3 años.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una televisión escogida al azar el tubo dure más de 10 años?
b) Si el fabricante ofrece una garantía de 3 años, ¿cuál es la probabilidad de que en un aparato escogido al azar el tubo se estropee durante el período de garantía?
c) Si el fabricante sólo está dispuesto a reemplazar el 2% de los tubos que fallen antes del tiempo de vida medio, ¿qué período de garantía debe ofrecer?

(Univ. de Cantabria, 1992)

a) $P(X > 10) = P(Z > \frac{10 - 7{,}2}{2{,}3}) = P(Z > 1{,}22) = 1 - P(Z \leq 1{,}22) = 1 - 0{,}8888 = \boxed{0{,}1112}$

b) $P(X \leq 3) = P(Z \leq \frac{3-7,2}{2,3}) = P(Z \leq -1,83) = 1 - P(Z \leq 1,83) = 1 - 0,96638 = \boxed{0,03362}$

c) Sea a el número de años pedido:

$$P(X \leq a) = P(Z \leq \frac{a-7,2}{2,3}) = \frac{2}{100} = 0,02$$

al ser esta probabilidad menor que 0,5 se tendrá que Z es negativa, de donde:

$$P(Z \leq \frac{a-7,2}{2,3}) = 1 - P(Z \leq -\frac{a-7,2}{2,3}) = 0,02 \Rightarrow P(Z \leq -\frac{a-7,2}{2,3}) = 1 - 0,02 = 0,98$$

En la tabla de distribución normal tipificada, 0,98 está comprendido entre los valores 0,97982 correspondiente al valor $z = 2,05$, y 0,98030 correspondiente al valor de $z = 2,06$:

$$0,98 - 0,97982 = 0,00018 \quad ; \quad 0,98030 - 0,98 = 0,00030$$

está más cercano al valor 0,97982, luego:

$$-\frac{a-7,2}{2,3} = 2,05 \Rightarrow -a + 7,2 = 2,3 \cdot 2,05 \Rightarrow \boxed{a = 2,485} \text{ años}$$

16.27 Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15. Determina el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110. ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50 % de la población?

En una población de 2.500 individuos ¿cuántos individuos se espera que tengan un coeficiente superior a 125?

(Univ. de Santiago, 1991)

$$P(95 \leq X \leq 110) = P(\frac{95-100}{15} \leq Z \leq \frac{110-100}{15}) = P(-0,33 \leq Z \leq 0,67) =$$

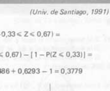
$$= P(Z \leq 0,67) - P(-0,33 \leq Z) = P(Z \leq 0,67) - [1 - P(Z \leq 0,33)] =$$

$$= P(Z \leq 0,67) + P(Z \leq 0,33) - 1 = 0,7486 + 0,6293 - 1 = 0,3779$$

El porcentaje pedido es $\boxed{37,79\ \%}$

El valor tipificado de 100 es $\frac{100-100}{15} = 0$

Si z_1 es el extremo superior tipificado del intervalo pedido se tendrá:



$$P(-z_1 \leq Z \leq z_1) = \frac{50}{100} = 0,50 \Rightarrow P(Z \leq z_1) - P(-z_1 \leq Z) = P(Z \leq z_1) - [1 - P(Z \leq z_1)] =$$

$$= 2 \cdot P(Z \leq z_1) - 1 = 0,5 \Rightarrow P(Z \leq z_1) = 0,75$$

En la tabla de distribución normal tipificada se ve que el valor de 0,75 está comprendido entre los valores 0,7486 y 0,7517 correspondientes a los valores $z_2 = 0,67$ y $z_3 = 0,68$.

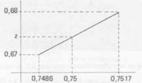
Haciendo una interpolación lineal:

$$\frac{z-0{,}67}{0{,}68-0{,}67}=\frac{0{,}75-0{,}7486}{0{,}7517-0{,}7486} \Rightarrow$$

$$z-0{,}67=0{,}01\,\frac{0{,}0014}{0{,}0031}=0{,}004516 \Rightarrow$$

$$z=0{,}6745$$

$$0{,}6745=\frac{x_1-100}{15} \Rightarrow x_1 \approx 110 \Rightarrow$$



el intervalo [90, 110] contiene el 50% de la población.

$$P(X>125)=P(Z>\frac{125-100}{15}=P(Z\geq 1{,}67)=1-P(Z\leq 1{,}67)=1-0{,}95254=0{,}04746$$

Esta es la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga un coeficiente superior a 125. En una población de 2 500 individuos cabe esperar que haya con un coeficiente superior a 125:

$$2\,500\cdot 0{,}04746 \approx \boxed{119}$$

16.28 Los pesos en Kg. de los bultos transportados por una empresa en 1990 tienen las siguientes características: media 80,5; desviación típica 10,5; mediana 84,0; primer cuartil 75,5; tercer cuartil 96,0.

a) ¿Cual es la proporción de pesos menores de 96 Kg? ¿Cuál la de pesos mayores de 84 Kg? ¿Cuál es la proporción de pesos incluidos en el intervalo (75,5, 96,0)?

b) Si la distribución de los pesos se asemeja a una distribución normal, ¿cuál sería la proporción aproximada de pesos pertenecientes al intervalo $(59{,}5\,,101{,}5)=(80{,}5-2\cdot 10{,}5\;;\;80{,}5+2\cdot 10{,}5)$?

(Univ. de Madrid, 1992)

a) Si el tercer cuartil es igual a 96 Kg., se tendrá que el 75% de los pesos es menor de 96 Kg. Si la mediana es igual a 84, el 50% de los pesos es mayor de 84 Kg. Si el primer cuartil es igual a 75,5 y el tercer cuartil es igual a 96 en el intervalo (75,5, 96) hay el 50% de los pesos.

b) En el intervalo $(59{,}5\;,\;101{,}5)=(\mu-2\sigma\;,\;\mu+2\sigma)$ se encuentran el 95,4% del total de los pesos.

16.29 En una revista médica se asegura que la cantidad media de colesterol en sangre en un varón adulto es de 200 mg por decilitro, y que sólo un 2'5% de los varones tiene más de 310 mg/dl.

a) Determinar la desviación típica, suponiendo que la cantidad de colesterol tiene una distribución normal.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un varón tenga menos de 100 mg/dl de colesterol?

(Univ. de Cantabria, 1992)

a) $P(X>310)=\frac{2'5}{100}=0{,}025 \Rightarrow P(Z>\frac{310-200}{\sigma})=0{,}025 \Rightarrow 1-P(Z\leq\frac{310-200}{\sigma})=$

$$=0{,}025 \Rightarrow P(Z\leq\frac{310-200}{\sigma})=1-0{,}025=0{,}975$$

En la tabla de distribución normal tipificada, a la probabilidad 0,975 corresponde el valor z = 1,96, de donde:

$$z = \frac{310-200}{\sigma} = 1{,}96 \Rightarrow 110 = 1{,}96 \cdot \sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = 56{,}12}$$

b) $P(X < 100) = P(Z < \frac{100-200}{56{,}12}) = P(Z < -1{,}78) = 1 - P(Z < 1{,}78) = 1 - 0{,}96246 = \boxed{0{,}03754}$

16.30 Se sabe que dos poblaciones distintas, X e Y, se distribuyen normalmente con media 0. Además $P(X \geq 2) = P(Y \geq 3) = 0{,}1587$. Se pide que calcules sus respectivas varianzas.
Indicaciones: Si Z es normal con parámetros 0,1, entonces $P(Z \leq 1) = 0{,}8413$.

(Univ. de Alicante, 1991)

Sea Z la variable tipificada de la población X, T la variable tipificada de la población Y, σ_x la desviación típica de la población X y σ_y la desviación típica de la población Y:

$$P(X \geq 2) = P(Y \geq 3) \Rightarrow P(Z \geq \frac{2-0}{\sigma_x}) = P(T \geq \frac{3-0}{\sigma_y}) \Rightarrow \text{por ser } \sigma_x > 0 \text{ y } \sigma_y > 0: \frac{2}{\sigma_x} = \frac{3}{\sigma_y}$$

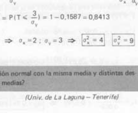
$$P(Z \geq \frac{2}{\sigma_x}) = P(T \geq \frac{3}{\sigma_y}) = 0{,}1587 \Rightarrow P(Z \leq \frac{2}{\sigma_x}) = P(T \leq \frac{3}{\sigma_y}) = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$$

y como $P(Z \leq 1) = 0{,}8413$, resulta: $\frac{2}{\sigma_x} = \frac{3}{\sigma_y} = 1 \Rightarrow \sigma_x = 2 \; ; \; \sigma_y = 3 \Rightarrow \boxed{\sigma_x^2 = 4} \quad \boxed{\sigma_y^2 = 9}$

16.31 ¿Qué relación guardan tres curvas de distribución normal con la misma media y distintas desviaciones? ¿Y con la misma desviación típica y distintas medias?

(Univ. de La Laguna – Tenerife)

Considerando que el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas es en todos los casos igual a 1:



Como la desviación típica indica la concentración de los datos alrededor de la media, tres curvas de distribución normal con la misma media y distintas desviaciones serán tres curvas simétricas, respecto del mismo eje de simetría y tanto más aplanadas conforme sus desviaciones típicas son más grandes.

Si las tres curvas tienen la misma desviación típica y distintas medias, las curvas serán iguales, pero con distintos ejes de simetría.

16.32 Considerar tres distribuciones binomiales B(10, 0,1), B(200, 0,1) y B(1 000, 0,1) y explicar cuál de ellas se puede aproximar mejor y cuál peor por una distribución normal.

(Univ. de Valencia)

La aproximación de la distribución binomial a la distribución normal es tanto mejor cuanto mayor es el producto $n \cdot p$: $10 \cdot 0{,}1 = 1$; $200 \cdot 0{,}1 = 20$; $1000 \cdot 0{,}1 = 100 \Rightarrow$ la distribución B(1000, 0,1) es la que mejor se puede aproximar a la normal, y la B(10, 0,1) la peor.

16.33 Una industria produce piezas con diámetros distribuidos según una Normal de media 0,75 cm. y desviación típica 0,002 cm.

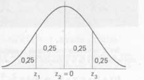
a) Determinar los cuartiles de la población de diámetros.

b) Supongamos que el control de calidad exige que las piezas tengan un diámetro entre 0,745 y 0,755 cm. Cualquier pieza con diámetro fuera de este rango es rechazada. Si se examina una muestra de 1000 piezas, ¿Cuantas es de esperar que sean rechazadas?

(Univ. de Madrid, 1991)

a) Sean z_1, z_2 y z_3 los valores tipificados de los cuartiles q_1, q_2 y q_3. Por ser la distribución normal, $z_2 = 0$, siendo z_1 y z_3 simétricos respecto de $z_2 = 0$.

$$P(Z < z_3) = 0,5 + 0,25 = 0,75$$

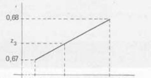


Este valor está comprendido, en la tabla de distribución normal tipificada, entre los valores 0,7486 y 0,7517, correspondientes, respectivamente, a los valores 0,67 y 0,68 de z. Interpolando:

$$\frac{z_3 - 0,67}{0,68 - 0,67} = \frac{0,75 - 0,7486}{0,7517 - 0,7486} \Rightarrow$$

$$z_3 - 0,67 = 0,01\,\frac{0,0014}{0,0031} = 0,0045 \Rightarrow$$

$$z_3 = 0,6745$$



$$z_3 = \frac{q_3 - 0,75}{0,002} = 0,6745 \Rightarrow \boxed{q_3 = 0,751349} \text{ cm.}$$

$$z_2 = 0 \Rightarrow \frac{q_2 - 0,75}{0,002} = 0 \Rightarrow \boxed{q_2 = 0,75} \text{ cm.}$$

Por ser z_1 y z_3 simétricos respecto de $z_2 = 0$: $\dfrac{z_1 + z_3}{2} = z_2 \Rightarrow \dfrac{z_1 + 0,6745}{2} = 0 \Rightarrow$

$$z_1 = -0,6745 \Rightarrow \frac{q_1 - 0,75}{0,002} = -0,6745 \Rightarrow \boxed{q_1 = 0,748651} \text{ cm.}$$

b) La probabilidad de que una pieza, elegida al azar, no sea rechazada es:

$$P(0,745 < X < 0,755) = P\left(\frac{0,745 - 0,75}{0,002} < Z < \frac{0,755 - 0,75}{0,002}\right) = P(-2,5 < Z < 2,5) =$$

$$= P(Z < 2,5) - P(-2,5 < Z) = P(Z < 2,5) - [1 - P(Z < 2,5)] =$$

$$= 0,993790 - (1 - 0,993790) = 0,98758$$

La probabilidad de que una pieza, elegida al azar, sea rechazada es: $1 - 0,98758 = 0,01242$

De una muestra de 1000 piezas es de esperar que sean rechazadas:

$$1000 \cdot 0,01242 \approx \boxed{12} \text{ piezas}$$

APENDICE

COMBINATORIA

VARIACIONES. Dado el conjunto C de m elementos, llamaremos **variación de orden n**, do subconjunto de C formado por n elementos ordenados, considerando que dos variaciones son tintas cuando *difieran en algún elemento,* y si constan de los mismos elementos, difieran en el *orde* colocación, $(0 < n \leq m)$.

Toda aplicación inyectiva del conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en el conjunto $C = \{a_1, a_2, \ldots,$ determina una variación de orden n de los m elementos de C si se consideran $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ este orden.

El número de variaciones de orden n de m elementos lo simbolizaremos así: V_m^n o $V_{m,n}$

$$\boxed{V_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}$$

V_m^n es igual al producto de n factores decrecientes a partir de m.

$V_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$; $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; $V_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

Si cada elemento de C puede figurar cualquier número de veces en una misma variación, ter mos las **variaciones con repetición.**

Toda aplicación de $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ determina una variación repetición de orden n de los elementos de C si se consideran $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ en este orden.

n puede ser menor, igual o mayor que m.

El número de variaciones con repetición de orden n de m elementos lo simbolizaremos así: o $R\,V_{m,n}$

$$\boxed{RV_m^n = m^n}$$

PERMUTACIONES. Las variaciones de orden m formadas con m elementos, se llaman pern ciones.

Dos permutaciones distintas están formadas por los mismos elementos, difieren tan solo en e *den* de colocación de éstos.

Toda aplicación biyectiva del conjunto $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ en el conjunto $C = \{a_1, a_2, \ldots,$ determina una permutación de los elementos de C si se consideran $f(1), f(2), \ldots, f(m)$ en este or

El número de permutaciones de m elementos lo simbolizaremos por: P_m

$$\boxed{P_m = m(m-1)(m-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!}$$

Permutaciones con repetición de m elementos entre los que hay α iguales entre sí, otros β iguales entre sí, . . . , otros λ iguales entre sí, son los distintos grupos ordenados de m elementos, considerando que dos grupos son distintos cuando difiere el orden de colocación de los m elementos.

Su número lo simbolizaremos por $P_m^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$

$$\boxed{P_m^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} = \frac{m!}{\alpha!\cdot\beta!\cdots\lambda!}}$$

COMBINACIONES. Dado un conjunto de m elementos, llamaremos **combinación de orden** n, a todo subconjunto de C formado por n elementos.

La variación {a, b, c} la representaremos por abc o {a, b, c}.

Dos combinaciones son distintas cuando difieren en algún elemento. El orden no se considera.

El número de combinaciones de orden n de m elementos lo simbolizaremos así: C_m^n o $C_{m,n}$

$$\boxed{C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} = \frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-n+1)}{n!}}$$

$C_5^2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$; $C_5^3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$; $C_5^4 = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5$

Combinaciones con repetición de m elementos de orden n, son los distintos grupos de n elementos, distintos o repetidos, elegidos entre los m dados, considerando que dos grupos son iguales cuando están formados por los mismos elementos repetidos igual número de veces.

Su número lo simbolizaremos por RC_m^n o $RC_{m,n}$

$$\boxed{RC_m^n = C_{m+n-1}^n}$$

NUMEROS COMBINATORIOS. Son los de la forma: $\frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$

Se simboliza por $\binom{m}{n}$ y se lee: m sobre n.

$$\boxed{\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}}$$

Propiedades:

$$C_m^n = \binom{m}{n}$$

$$\binom{m}{0} = \frac{m!}{0!\ m!} = 1 \quad \text{(por convenio } 0! = 1)$$

$$\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

POTENCIA DE UN BINOMIO.

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{h} a^{n-h}b^h + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

Esta fórmula se llama **binomio de Newton.** Los coeficientes equidistantes de los extremos son iguales.

Hallando uno de los coeficientes: $\binom{n}{h}$, el siguiente es $\binom{n}{h+1} = \binom{n}{h}\frac{n-h}{n+1}$

Cuando n no es elevado, los coeficientes de $(a+b)^n$ se calculan cómodamente por el siguiente cuadro llamado triángulo de Tartaglia:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdots & \cdots & & & & & & & & & & \cdots
\end{array}$$

que se obtiene escribiendo en primer lugar las dos oblicuas 1, 1, 1,... Después, cada número es igual a la suma de los dos que tiene encima.

$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

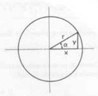
FORMULAS DE TRIGONOMETRIA PLANA

Definición de las funciones trigométricas:

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{r}$ $\quad \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{r}{y}$

$\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ $\quad \sec\alpha = \dfrac{r}{x}$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$ $\quad \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$

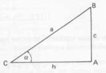


– para ángulos menores de 90° (de un triángulo rectángulo)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$



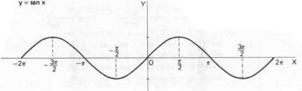
Un cateto es igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto.
Un cateto es igual a la hipotenusa por el coseno del ángulo comprendido.

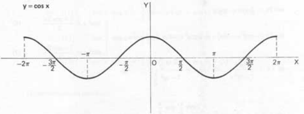
Valor del seno, coseno y tangente de los ángulos más usados:

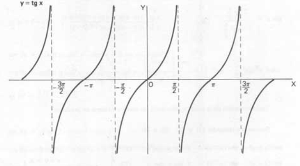
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Relación entre los valores de las funciones de ángulos complementarios, suplementarios, etc.

	$90°-\alpha$	$180°-\alpha$	$-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$
sen	$\cos\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$
tg	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$


y = sen x
Y
X
O
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π


y = cos x
Y
X
O
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π


y = tg x
Y
X
O
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$

Fórmulas más usadas.

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \; ; \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \; ; \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen} y \qquad (2)$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \qquad (3)$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \quad (5) \; ; \quad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

haciendo $y = x$ en (1), (3) y (5):

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{ll} \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} & (6) \\ \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} & (7) \end{array} \right.$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad (8)$$

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}$$ (dividiendo numerador y denominador por $\cos^2 \frac{x}{2}$)

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad (9)$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \qquad (10)$$

Transformación de la suma, o diferencia, de senos y cosenos en producto:

Sumando y restando (1) y (2), (3) y (4)

$$\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos y \qquad (11)$$

$$\operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} y \qquad (12)$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cdot \cos x \cdot \cos y \qquad (13)$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \qquad (14)$$

haciendo $\left. \begin{array}{l} x + y = A \\ x - y = B \end{array} \right| \Rightarrow$ $x = \dfrac{A+B}{2}$, $y = \dfrac{A-B}{2}$

de donde:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \qquad (15)$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \qquad (16)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \qquad (17)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \qquad (18)$$

Transformación del producto de senos y cosenos en suma:

De (11): $$\operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\right) \qquad (19)$$

" (13): $$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right) \qquad (20)$$

" (14): $$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right) \qquad (21)$$

Otras fórmulas de interés:

$$\operatorname{sen}(a+b+c) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \cdot \cos c + \operatorname{sen} c \cdot \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c$$

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos c - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos a$$

$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c}$$

$$\operatorname{sen} 3x = 3 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$$

$$\cos 3x = \cos^3 - 3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{sen} 4x = (4 \operatorname{sen} x - 8 \operatorname{sen}^3 x) \cos x$$

$$\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

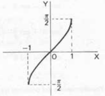
$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}^3 x}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$$

Funciones trigonométricas inversas.

Función arco seno:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \text{arc sen } x \\ x \in [-1, 1] \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} x = \text{sen } y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}}$$

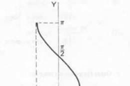
x	-1		0		1
arc sen x	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$



Función arco coseno:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \text{arc cos } x \\ x \in [-1, 1] \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{array}}$$

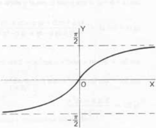
x	-1		0		1
arc cos x	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0



Función arco tangente:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \text{arc tg } x \\ x \in \mathbb{R} \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} x = \text{tg } y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{array}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
arc tg x	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\frac{\pi}{2}$



Propiedades:

$\text{arc sen}(-x) = -\text{arc sen } x \qquad \forall x \in [-1, 1]$

$\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in [-1, 1]$

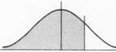
$\text{arc tg}(-x) = -\text{arc tg } x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{arc tg } x + \text{arc tg } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

DISTRIBUCION NORMAL TIPIFICADA

Función de distribución

$$F(z) = P(Z < z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz$$



z

TABLA VI–2 (final)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8661
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93669	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996736	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999

EXÁMENES DE MATEMÁTICAS II DE SELECTIVIDAD

444 problemas, totalmente resueltos, seleccionados de los exámenes de Selectividad de los últimos años, junto a más de 230 ejercicios intercalados en el denso resumen teórico con el que empieza cada capítulo, hacen de este libro la mejor publicación sobre el temario de Matemáticas II.

9 788473 601351

ISBN 84-7360-135-1